



**Zentrale Abiturprüfung 2013
Haupttermin
16.04.2013**

**Weiterer Leistungskurs
Mathematik
(ohne CAS)**

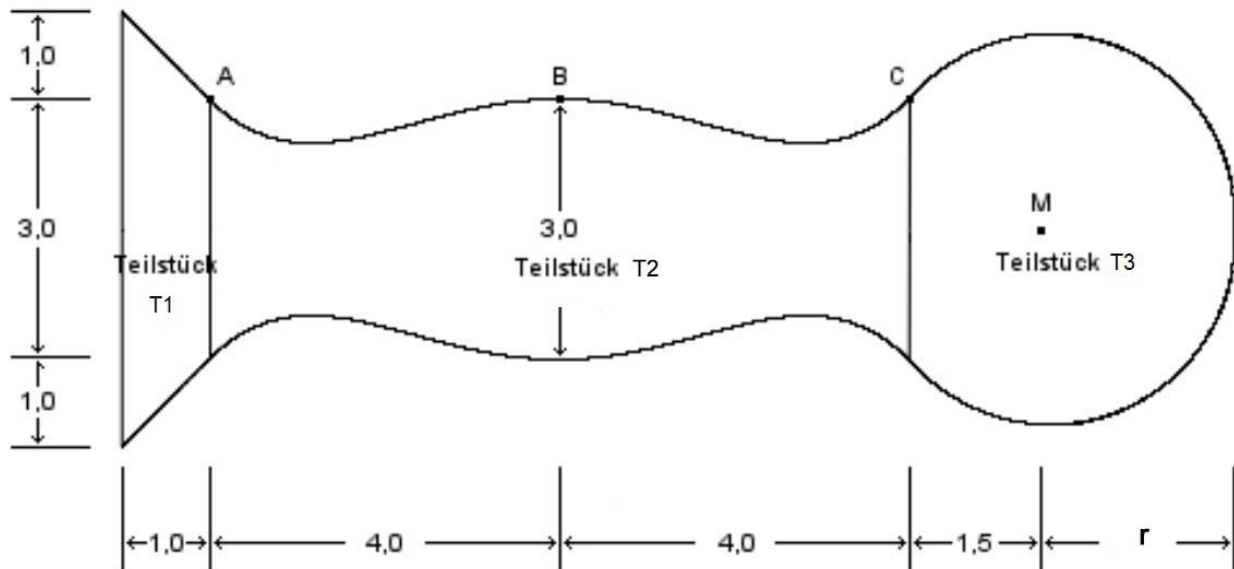
Fachbereich Technik

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

Aufgabe 1

Die Designer eines Fahrradherstellers haben den abgebildeten Handgriff für ein neues Kinderfahrrad entworfen.



Alle Maßangaben in cm.

Für die Berechnungen ist ein Koordinatensystem vorteilhaft, das seinen Ursprung in der Mitte von Teilstück T2 hat. Der Materialbedarf für einen Griff soll berechnet werden, damit die entsprechenden Kunststoffmengen bestellt werden können.

- 1.1 Für die Berechnung ist die mathematische Beschreibung der oberen Mantellinie notwendig.

Die Mantellinie des abgebildeten Griffes setzt sich zusammen aus einer Geraden g im Teilstück T1, dem Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades im Teilstück T2 und einer Kreislinie k im Teilstück T3. Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Der Durchmesser des Griffes an den Stellen A, B und C beträgt jeweils 3 cm. Der Übergang im Punkt A ist glatt, d. h. die Funktionswerte und die Werte der ersten Ableitung beider Funktionen stimmen an dieser Stelle jeweils überein.

Stellen Sie die Funktionsvorschriften für die Gerade g und die Funktion f auf.

10 Punkte

Verwenden Sie im Folgenden:

die Gerade g mit $g(x) = -x - 2,5$, $x \in [-5; -4]$

die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{128} \cdot x^4 - \frac{1}{8} \cdot x^2 + 1,5$, $x \in [-4; 4]$

und die Kreislinie k mit $k(x) = \sqrt{4,5 - (x - 5,5)^2}$, $x \in [4; 5,5 + r]$

Diese Angaben beziehen sich auf die empfohlene Lage des Koordinatensystems.

- 1.2 Untersuchen Sie, ob im Punkt C die Werte der ersten Ableitung beider Funktionen übereinstimmen.

4 Punkte

- 1.3 Der Fahrradgriff soll als Rotationskörper aufgefasst werden. Dabei wird die äußere Kontur durch die Mantellinie (siehe 1.1) beschrieben. Zum Aufstecken auf den Fahrradlenker muss der Griff innen einen zylindrischen Hohlraum von 10 cm Tiefe und 1,8 cm Durchmesser aufweisen.

Für das Teilstück T2 wurde das Gesamtvolumen des ausgefüllten Körpers mit $V_{T2} = 39 \text{ cm}^3$ bestimmt.

Ermitteln Sie den Materialbedarf für einen fertigen Fahrradgriff.

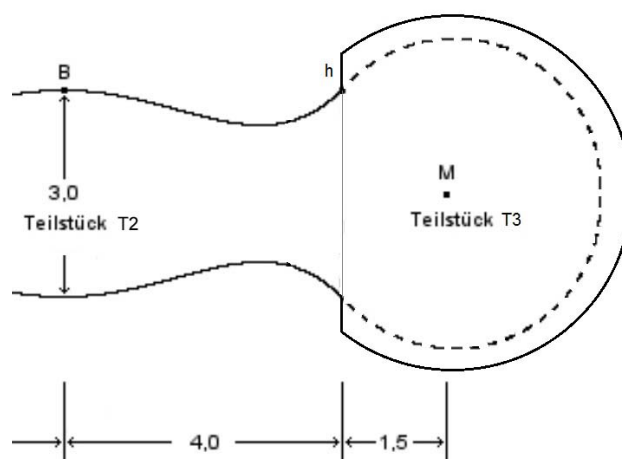
12 Punkte

- 1.4 Die Materialstärke des Griffs soll an allen Stellen mindestens 1 mm betragen (unter Berücksichtigung des Hohlraums, vgl. 1.3).

Prüfen Sie, ob dies im Teilstück T2 der Fall ist.

12 Punkte

- 1.5 Die Form des Griffs soll an der Außenseite aus Sicherheitsgründen angepasst werden. Die Kugel soll einen größeren Radius bei Beibehaltung des Mittelpunkts erhalten. Dadurch entsteht eine vertikale Kante, welche das Abrutschen der Kinderhand verhindern soll.



Leiten Sie unter Verwendung von $k(x) = \sqrt{r^2 - (x - 5,5)^2}$ den passenden Radius r für den Fall her, dass die Funktion k an der Grenzstelle zwischen den Teilstücken T2 und T3 eine Steigung von $m = 0,75$ haben soll und ermitteln Sie die Höhe h der daraus entstehenden Kante.

7 Punkte

Aufgabe 1 gesamt: 45 Punkte



Aufgabe 2

Für einen Bildschirmschoner soll ein *Particle-Systems*-Effekt zum Einsatz kommen. *Particle Systems* bestehen aus einzelnen geometrischen Objekten, die sich verformen und auf bestimmten Bahnen bewegen.

Die Firma, die den Bildschirmschoner bestellt hat, wünscht sich immer kleiner werdende Quadrate, die sich spiralförmig einem Punkt nähern sollen.

Die Ecken eines Quadrats liegen am Anfang bei den Punkten A (-1 | -1), B (1 | -1), C (1 | 1) und D (-1 | 1). Ein Teilschritt der Bildveränderung wird durch die Abbildung f mit

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

festgelegt.

- 2.1 Berechnen Sie nach einmaliger und zweimaliger Anwendung der Abbildung f
- jeweils die Koordinaten der Eckpunkte des Quadrates und
 - die jeweiligen Flächeninhalte der entstehenden Quadrate.

Stellen Sie das Ausgangsquadrat und die berechneten Quadrate in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

14 Punkte

- 2.2 Begründen Sie, dass die Matrix $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ eine Drehung um den Ursprung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel φ bewirkt, indem Sie die Punkte $E_1 (1 | 0)$ und $E_2 (0 | 1)$ mit R abbilden.

5 Punkte

- 2.3 Zeigen Sie, dass die durch f gegebene Abbildung zerlegt werden kann in:
- eine Drehung um 45° im Uhrzeigersinn um den Ursprung
 - eine Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und
 - abschließend eine Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8 Punkte

- 2.4 Begründen Sie, dass bei vielfacher Anwendung der Abbildung f das Quadrat irgendwann nicht mehr zu erkennen ist.

4 Punkte



- 2.5 Leiten Sie durch Lösen der Gleichung $f(\vec{x}) = \vec{x}$ her, dass $F(0 | -2)$ der einzige Punkt ist, der bei der Anwendung von f unverändert bleibt und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Entwicklung des anfänglichen Quadrates bei mehrfacher Anwendung von f .

9 Punkte

- 2.6 Der Bildschirmschoner wird um eine Funktionalität erweitert. Dabei sollen die Bewegungen der Quadrate umgekehrt zu der durch f beschriebenen Abbildung verlaufen, d. h. die Quadrate werden größer und drehen sich in die andere Richtung.

Zeigen Sie, dass durch $M_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix zu $M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

gegeben ist und

leiten Sie damit die Funktionsvorschrift der zu f inversen Abbildung her.

5 Punkte

Aufgabe 2 gesamt: 45 Punkte

Aufgabe 3

Ein Werkzeughersteller stellt Schlosserhämmer her. Die Fertigung der Hämmer ist dabei ein dreigliedriger Prozess: Im ersten Fertigungsprozess (Prozess A) wird der Hammerkopf in einer Schmiede gefertigt. In einer Schreinerei werden die Hammerstiele gefräst (Prozess B) und anschließend werden die Hammerstiele und Köpfe in einem dritten Prozess (Prozess C) zusammengesetzt.



Die Schreibweise $P(A\bar{B}C)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass die Prozesse A und C ohne Fehler, der Prozess B mit Fehlern durchlaufen wird.

- 3.1 Es werden Hämmer mit 6 unterschiedlichen Köpfen und 3 unterschiedlich geformten Stielen hergestellt. Außerdem kann jeder Stiel wahlweise aus den Holzarten Hickory oder Esche gefertigt werden.

Berechnen Sie, wie viele unterschiedliche Hämmer die Firma anbieten kann.

4 Punkte

In der Firma wird im Schichtbetrieb bei zwei Schichten pro Tag gearbeitet. Die Abteilungsleiterin benötigt in der Schmiede in jeder Schicht 6 Arbeitskräfte: 2 an den Fallhämmern, 3 für das Entfernen der Metallreste und 1 zum Lackieren. Zur Verfügung stehen ihr für jeden Tag 14 Arbeitskräfte, welche alle jeden Arbeitsgang ausführen können.

Jede Arbeitskraft darf allerdings maximal eine Schicht am Tag arbeiten.

- 3.2 Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, welche die Abteilungsleiterin hat, aus den 14 Arbeitskräften, die Früh- und Spätschicht eines Tages zusammen zu setzen (ohne Berücksichtigung der Arbeitsgänge).

4 Punkte

- 3.3 Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten die Abteilungsleiterin hat, eine Schichtbesetzung auf die drei Arbeitsgänge aufzuteilen.

4 Punkte

Die Hämmer werden ohne Zwischenkontrolle zusammengesetzt. Erst am Ende der Fertigung wird jeder Hammer getestet. Es ist bekannt, dass bei der Produktion im Prozess A Produktionsfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(\bar{A}) = 0,002$ auftreten. Für den Prozess B gilt $P(B) = 0,982$.

- 3.4 Erklären Sie im Sachzusammenhang, warum bei dieser Art der Produktion bei den Produktionsfehlern im Prozess A und B von einer stochastischen Unabhängigkeit ausgegangen werden kann.

3 Punkte



- 3.5 Berechnen Sie unter der Bedingung der Unabhängigkeit aus Aufgabe 3.4 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Hammer beide Produktionsprozesse A und B hintereinander fehlerfrei durchlaufen werden.

3 Punkte

Im Weiteren betrage die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Hammer beide Produktionsprozesse A und B hintereinander fehlerfrei durchlaufen werden $P(AB) = 0,98$.

- 3.6 Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Hammer alle drei Produktionsprozesse fehlerfrei durchlaufen werden, beträgt $P(ABC) = 0,97$. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Prozess C Fehler auftreten, wenn schon in den beiden anderen Prozessen jeweils Fehler aufgetreten sind, beträgt $P_{AB}(\bar{C}) = 0,013$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass ein Fehler im dritten Produktionsprozess stochastisch abhängig von einem Fehler in den beiden ersten Produktionsprozessen ist und

berechnen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung, wie viele Hämmer die Firma herstellen muss, damit sie im Mittel 1200 fehlerfreie Hämmer erwarten kann.

8 Punkte

- 3.7 Die Hammerköpfe werden zuerst geschmiedet und danach durch einen Schleifvorgang auf das Sollgewicht von 118 g gebracht. Für die Zufallsvariable X: „Hammerkopfgewicht nach dem Schmieden“ ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Gewicht in g (gerundet) x_i	118	119	120	121	122	123	124
$P(X = x_i)$	0,01	0,02	0,11	0,31	0,43	0,11	0,01

Ein Mitarbeiter schlägt vor, die Metallreste aus dem Schleifen zu sammeln und wieder zu verwerten. Der Stahlpreis liegt aktuell bei ungefähr 800 € pro Tonne Stahl.

Ermitteln Sie, mit welchem zusätzlichen Jahreserlös bei einer Tagesproduktion von 1600 Hämmern und 240 Arbeitstagen pro Jahr durchschnittlich gerechnet werden kann.

6 Punkte



- 3.8 Ein Mitarbeiter der Qualitätskontrolle informiert den Schichtleiter der neuen Schicht, dass von den zuletzt produzierten 100 Hämmern mehr als 10 Hämmer Fehler hatten.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine solche Fehlerquote und beurteilen Sie die Situation.

(Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Hammer alle drei Produktionsprozesse fehlerfrei durchlaufen werden, beträgt $P(ABC) = 0,97$.)

6 Punkte

- 3.9 Die Durchmesser der Stiele werden in der Schreinerei üblicherweise mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,1$ annähernd normalverteilt um den Erwartungswert $\mu = 13,4$ gefertigt (Angaben in mm).

Der Schichtleiter vermutet, dass ein Einstellungsfehler an der Fräse in der Schreinerei vorliegt. Um seine Vermutung zu überprüfen ordnet er an, dass die Durchmesser aller gefrästen Hammerstiele gemessen werden.

Bei Überschreiten einer Abweichung d_{\max} vom Erwartungswert muss die Fräse neu justiert werden.

Leiten Sie her, wie groß diese Abweichung d_{\max} festgelegt werden muss, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Neujustieren der Fräse einen Wert von 0,01 nicht überschreiten soll.

Hinweis: für die Umgebung von μ gilt : $P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) \approx 2 \cdot \Phi(z) - 1$

7 Punkte

Aufgabe 3 gesamt: 45 Punkte



Anlagen: Tabellen der kumulierten Binomialverteilungen

n	k	0,01	0,02	0,03	0,3	k	n
100	0	0,3660	0,1326	0,0476		100	100
	1	0,7358	0,4033	0,1946		99	
	2	0,9206	0,6767	0,4198		98	
	3	0,9816	0,8590	0,6472		97	
	4	0,9966	0,9492	0,8179		96	
	5	0,9995	0,9845	0,9192		95	
	6	0,9999	0,9959	0,9688		94	
	7	1,0000	0,9991	0,9894		93	
	8		0,9998	0,9968		92	
	9		1,0000	0,9991		91	
	10			0,9998		90	
	11			1,0000		89	
	12				0,0000	88	
	13				0,0001	87	
	14				0,0002	86	
	15				0,0004	85	
	16				0,0010	84	
	17				0,0022	83	
	18				0,0045	82	
	19				0,0089	81	
	20				0,0165	80	
	21				0,0288	79	
	22				0,0479	78	
	23				0,0755	77	
	24				0,1136	76	
	25				0,1631	75	
	26				0,2244	74	
	27				0,2964	73	
	28				0,3768	72	
	29				0,4623	71	
	30				0,5491	70	
	31				0,6331	69	
	32				0,7107	68	
	33				0,7793	67	
	34				0,8371	66	
	35				0,8839	65	
	36				0,9201	64	
	37				0,9470	63	
	38				0,9660	62	
	39				0,0000	61	
	40				0,0001	60	
100							100
n	k	0,99	0,98	0,97	0,7	k	n

Hinweis: Für Wahrscheinlichkeiten $p > 0,5$ lassen sich die untere Zeile und die rechte Spalte verwenden. Dabei gilt $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - \text{"abgelesener Wert"}$



GAUSSsche Integralfunktion ($\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	5000	0,40	6554	0,80	7881	1,20	8849	1,60	9452	2,00	9772	2,40	9918	2,80	9974
0,01	5040	0,41	6591	0,81	7910	1,21	8869	1,61	9463	2,01	9778	2,41	9920	2,81	9975
0,02	5080	0,42	6628	0,82	7939	1,22	8888	1,62	9474	2,02	9783	2,42	9922	2,82	9976
0,03	5120	0,43	6664	0,83	7967	1,23	8907	1,63	9484	2,03	9788	2,43	9925	2,83	9977
0,04	5160	0,44	6700	0,84	7995	1,24	8925	1,64	9495	2,04	9793	2,44	9927	2,84	9977
0,05	5199	0,45	6736	0,85	8023	1,25	8944	1,65	9505	2,05	9798	2,45	9929	2,85	9978
0,06	5239	0,46	6772	0,86	8051	1,26	8962	1,66	9515	2,06	9803	2,46	9931	2,86	9979
0,07	5279	0,47	6808	0,87	8078	1,27	8980	1,67	9525	2,07	9808	2,47	9932	2,87	9979
0,08	5319	0,48	6844	0,88	8106	1,28	8997	1,68	9535	2,08	9812	2,48	9934	2,88	9980
0,09	5359	0,49	6879	0,89	8133	1,29	9015	1,69	9545	2,09	9817	2,49	9936	2,89	9981
0,10	5398	0,50	6915	0,90	8159	1,30	9032	1,70	9554	2,10	9821	2,50	9938	2,90	9981
0,11	5438	0,51	6950	0,91	8186	1,31	9049	1,71	9564	2,11	9826	2,51	9940	2,91	9982
0,12	5478	0,52	6985	0,92	8212	1,32	9066	1,72	9573	2,12	9830	2,52	9941	2,92	9982
0,13	5517	0,53	7019	0,93	8238	1,33	9082	1,73	9582	2,13	9834	2,53	9943	2,93	9983
0,14	5557	0,54	7054	0,94	8264	1,34	9099	1,74	9591	2,14	9838	2,54	9945	2,94	9984
0,15	5596	0,55	7088	0,95	8289	1,35	9115	1,75	9599	2,15	9842	2,55	9946	2,95	9984
0,16	5636	0,56	7123	0,96	8315	1,36	9131	1,76	9608	2,16	9846	2,56	9948	2,96	9985
0,17	5675	0,57	7157	0,97	8340	1,37	9147	1,77	9616	2,17	9850	2,57	9949	2,97	9985
0,18	5714	0,58	7190	0,98	8365	1,38	9162	1,78	9625	2,18	9854	2,58	9951	2,98	9986
0,19	5753	0,59	7224	0,99	8389	1,39	9177	1,79	9633	2,19	9857	2,59	9952	2,99	9986
0,20	5793	0,60	7257	1,00	8413	1,40	9192	1,80	9641	2,20	9861	2,60	9953	3,00	9987
0,21	5832	0,61	7291	1,01	8438	1,41	9207	1,81	9649	2,21	9864	2,61	9955	3,01	9987
0,22	5871	0,62	7324	1,02	8461	1,42	9222	1,82	9656	2,22	9868	2,62	9956	3,02	9987
0,23	5910	0,63	7357	1,03	8485	1,43	9236	1,83	9664	2,23	9871	2,63	9957	3,03	9988
0,24	5948	0,64	7389	1,04	8508	1,44	9251	1,84	9671	2,24	9875	2,64	9959	3,04	9988
0,25	5987	0,65	7422	1,05	8531	1,45	9265	1,85	9678	2,25	9878	2,65	9960	3,05	9989
0,26	6026	0,66	7454	1,06	8554	1,46	9279	1,86	9686	2,26	9881	2,66	9961	3,06	9989
0,27	6064	0,67	7486	1,07	8577	1,47	9292	1,87	9693	2,27	9884	2,67	9962	3,07	9989
0,28	6103	0,68	7517	1,08	8599	1,48	9306	1,88	9699	2,28	9887	2,68	9963	3,08	9990
0,29	6141	0,69	7549	1,09	8621	1,49	9319	1,89	9706	2,29	9890	2,69	9964	3,09	9990
0,30	6179	0,70	7580	1,10	8643	1,50	9332	1,90	9713	2,30	9893	2,70	9965	3,10	9990
0,31	6217	0,71	7611	1,11	8665	1,51	9345	1,91	9719	2,31	9896	2,71	9966	3,11	9991
0,32	6255	0,72	7642	1,12	8686	1,52	9357	1,92	9726	2,32	9898	2,72	9967	3,12	9991
0,33	6293	0,73	7673	1,13	8708	1,53	9370	1,93	9732	2,33	9901	2,73	9968	3,13	9991
0,34	6331	0,74	7704	1,14	8729	1,54	9382	1,94	9738	2,34	9904	2,74	9969	3,14	9992
0,35	6368	0,75	7734	1,15	8749	1,55	9394	1,95	9744	2,35	9906	2,75	9970	3,15	9992
0,36	6406	0,76	7764	1,16	8770	1,56	9406	1,96	9750	2,36	9909	2,76	9971	3,16	9992
0,37	6443	0,77	7794	1,17	8790	1,57	9418	1,97	9756	2,37	9911	2,77	9972	3,17	9992
0,38	6480	0,78	7823	1,18	8810	1,58	9429	1,98	9761	2,38	9913	2,78	9973	3,18	9993
0,39	6517	0,79	7852	1,19	8830	1,59	9441	1,99	9767	2,39	9916	2,79	9974	3,19	9993



Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Abbildungen wurden selbst erstellt.

Zugelassene Hilfsmittel

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz ohne CAS **zugelassen**:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten (Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.)
- Tabellierte kumulierte Binomialverteilung,
- nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz ohne CAS **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
- Computeralgebrasysteme
- Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------