



**Zentrale Abiturprüfung 2012
Nachschreibtermin
22.05.2012**

**Weiterer Leistungskurs
Mathematik**

Fachbereich Technik

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Name des Prüflings: _____

Aufgabe 1

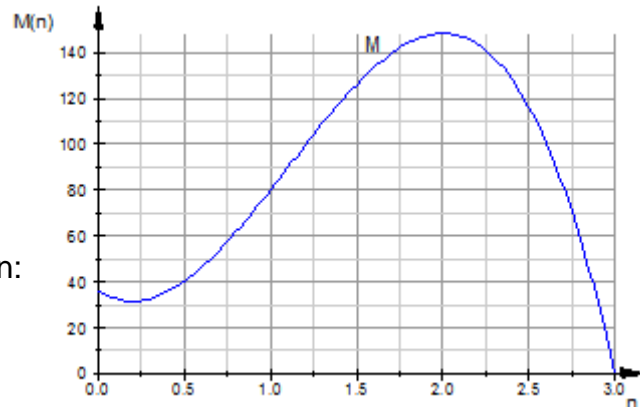
Beschreibung der Ausgangssituation

In einer Maschinenbaufirma muss ein Kran mit einem neuen Motor ausgestattet werden. Eine wesentliche Eigenschaft eines Motors ist das Drehmoment. Dieses soll im Folgenden untersucht werden, um einen geeigneten Motor auszuwählen.

Die Kennlinie des Drehmoments gibt das Drehmoment M in Abhängigkeit von der Drehzahl n an.

Sie lässt sich für einen Motor des Typs A in guter Näherung durch die ganzrationale Funktion M beschreiben:

$$M(n) = -40 \cdot n^3 + 132 \cdot n^2 - 48 \cdot n + 36,14$$



(M in Nm, n in 1000 Umdrehungen pro Minute)

Aufgabenstellung

Punkte

- | | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Berechnen Sie das größte Drehmoment und die Drehzahl, bei der es erreicht wird. | 6 P |
| 1.2 | Der Motor A soll ein minimales Drehmoment M_{\min} zur Verfügung stellen, welches über 30 Nm liegt. Diese Untergrenze wird auch als Belastungsgerade bezeichnet.
Zeichnen Sie die Belastungsgerade M_L mit der Funktionsgleichung $M_L(n) = 30$ in das obige Koordinatensystem ein.
Weisen Sie nach, dass die Kennlinie des Drehmoments im Bereich von 0 bis 2900 Umdrehungen pro Minute oberhalb der Belastungsgeraden verläuft. | 6 P |
| 1.3 | Der Arbeitspunkt ist der Schnittpunkt der Kennlinie des Drehmoments M mit der Belastungsgeraden M_L .
Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens den Arbeitspunkt auf drei Nachkommastellen genau.
Das Drehmoment im Arbeitspunkt soll höchstens 1% von der Vorgabe 30 Nm abweichen.
Bewerten Sie Ihr Ergebnis dahingehend. | 9 P |



- 1.4 Ermitteln Sie das durchschnittliche Drehmoment des Motors Typ A im Bereich der Drehzahl von 0 bis 3000 Umdrehungen pro Minute. 6 P
Hinweis: Der Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ wird

berechnet mit: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t) dt$

Alternativ zu den obigen Motoren vom Typ A sollen nun Motoren des Typs B untersucht werden. Die Kennlinienschar M_r des Drehmoments (in Nm) in Abhängigkeit von der Drehzahl n (in 1000 Umdrehungen pro Minute) stellt sich wie folgt dar:

$$M_r(n) = \frac{r \cdot 3000 \cdot \left(1 - \frac{n}{3}\right)}{r^2 + 100 \cdot \left(1 - \frac{n}{3}\right)^2} \quad \text{mit einem Parameter } r > 0, n \in [0; 3]$$

Von diesem Typ ist bekannt, dass im Definitionsbereich genau ein Maximum des Drehmoments liegt, damit kann in den Aufgabenteilen 1.5 und 1.6 auf die Überprüfung der zweiten Ableitung verzichtet werden.

- 1.5 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung des Drehmoments gilt: 9 P

$$M_r'(n) = \frac{-1000 \cdot r \cdot \left(r^2 - 100 \cdot \left(1 - \frac{n}{3}\right)^2\right)}{\left(r^2 + 100 \cdot \left(1 - \frac{n}{3}\right)^2\right)^2}$$

Hinweis: Für die Herleitung dieses Ausdrucks ist es sinnvoll, den Term $\left(1 - \frac{n}{3}\right)$ vor dem Differenzieren nicht aufzulösen.

- 1.6 Zeigen Sie, dass das maximale Drehmoment eines Motors des Typs B unabhängig vom Parameter r ist. 9 P

Gesamtpunkte Aufgabe 1 45 P

Aufgabe 2

Beschreibung der Ausgangssituation

Eine Produktionsfirma setzt bahngesteuerte Roboter ein. Die Bewegung des Roboterarms zwischen zwei programmierten Punkten A und B erfolgt auf einer durch Lageregelung kontrollierten Bahn.

Um einen Arbeitsplatz liegt eine würfelförmige Schutzzone (s. Abb. 2.1) mit einer Kantenlänge von $a = 4$ (die Einheit m werde hier und im Folgenden vernachlässigt).

Sie wird begrenzt durch die Eckpunkte P_0 bis P_7 . Das Koordinatensystem werde so gelegt, dass die Ecke P_0 des Schutzraums im Ursprung liegt.



Abb. 1

In der Nähe dieser Schutzzone befindet sich der Roboter, dessen Greifarmspitze sich auf einer geradlinigen Bahn g vom Punkt $A(5|1|0)$ zum Punkt $B(1|9|\frac{9}{2})$ bewegen soll. Aus Vereinfachungsgründen soll die Greifarmspitze S des Roboters als punktförmig angenommen werden.

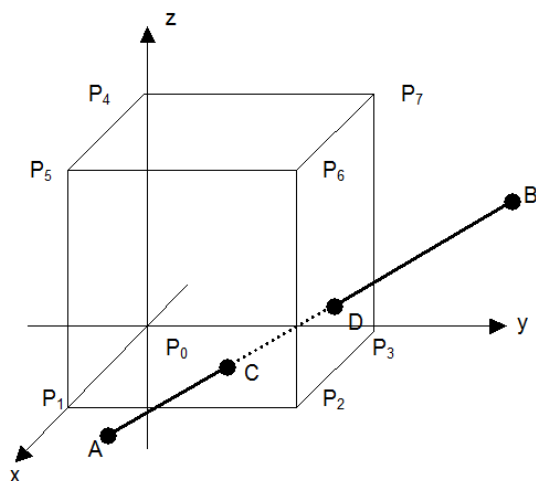


Abbildung 2.1

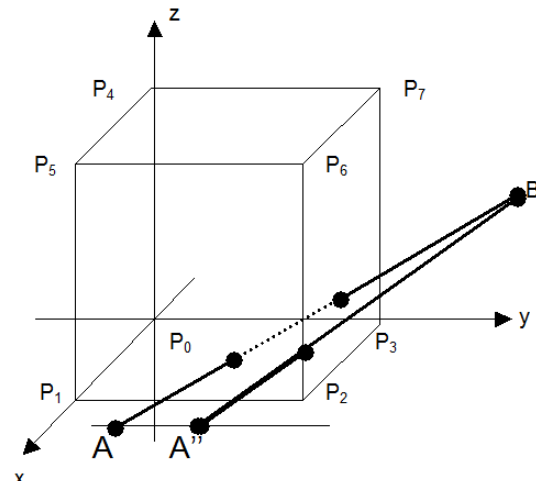


Abbildung 2.2

Aufgabenstellung

Punkte

- 2.1 Zeigen Sie, dass die Greifarmspitze S auf dem Weg von der Startposition A zur Zielposition B die Schutzzone verletzt und bestimmen Sie die Durchstoßpunkte C und D.

12 P



Nutzen Sie im Folgenden die Kontrollergebnisse:

$$g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \quad C\left(4 \mid 3 \mid \frac{9}{8}\right), \quad D\left(\frac{7}{2} \mid 4 \mid \frac{27}{16}\right)$$

- 2.2 Berechnen Sie den Abstand von C nach D und ermitteln Sie den Abstand der Geraden durch A und B zum Ursprung. 10 P

- 2.3 Ein weiterer Roboterarm bewege sich mit seiner Greifarmspitze zwischen den Punkten K (-2 | 9 | 3) und L (1 | 4,2 | 0,6). Begründen Sie, weshalb sich die beiden Greifarmspitzen nicht berühren.
Es sollen hier nur die Spitzen der Roboterarme betrachtet werden, die eigentlichen Roboterarme bleiben unberücksichtigt. 6 P

Der Startpunkt A des Roboterarms ist beweglich. Er kann in der Ebene $x = 5$ parallel zur $y - z$ - Ebene bewegt werden.

- 2.4 Die Greifarmspitze startet nun im Punkt A' (5 | 5 | 2). Bestimmen Sie den Winkel zwischen \overrightarrow{AB} und $\overrightarrow{A'B}$ und berechnen Sie, um wie viel Prozent die Verbindung von A' nach B kürzer ist als die Verbindung von A nach B. 10 P
- 2.5 Der Startpunkt A'' soll jetzt auf einer Schiene parallel zur y-Achse so gewählt werden, dass die Verbindung von A'' nach B die Schutzzone gerade berührt. Die z-Komponente von A'' sei 0 (s. Abb. 2.2). Leiten Sie die Koordinaten des Punktes A'' her. 7 P

Gesamtpunkte Aufgabe 2 45 P



Aufgabe 3

Beschreibung der Ausgangssituation

In einem Labor werden die Eigenschaften eines neuen Werkstoffs zur Herstellung von Brücken geprüft. Dazu wird in einer Stichprobe von 100 Werkstücken die Elastizität E gemessen.

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl H_i der in den jeweiligen Bereichen gemessenen Elastizitätswerte an.

E_i	(40;42]	(42;44]	(44;46]	(46;48]	(48;50]	(50;52]	(52;54]	(54;56]	(56;58]
H_i	1	2	13	18	27	21	13	4	1

Aufgabenstellung

Punkte

- 3.1 Stellen Sie die relativen Häufigkeiten der Stichprobe gegenüber den Klassenmitten in einem Säulendiagramm graphisch dar. 6 P
- 3.2 Erläutern Sie mit drei Argumenten, warum die Elastizität als normalverteilte Zufallsgröße betrachtet werden kann. 6 P
- 3.3 Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgröße. 8 P

Verwenden Sie im Folgenden die Kontrollergebnisse $\mu = 49,18$ und $\sigma = 3,02$ für die normalverteilte Zufallsgröße X_E der Elastizität.

X_{Ei}	41	43	45	47	49	51	53	55	57
H_i	1	2	13	18	27	21	13	4	1
$Z_{Ei} = \frac{X_{Ei} - \mu}{\sigma}$	-2,71		-1,38		-0,06		1,26		2,59

Die Transformation $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ liefert zu einer Zufallsgröße X die zugehörige standardisierte Zufallsgröße Z .

- 3.4 Berechnen Sie zu den obigen Messwerten die fehlenden zugehörigen standardisierten Messwerte Z_{Ei} sowie deren Erwartungswert und Standardabweichung und begründen Sie anschaulich, wie durch diese Transformation die Anwendbarkeit der Normalverteilungstabelle ermöglicht wird. 11 P



- 3.5 Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle der Standard-Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück mindestens eine Elastizität von 45 hat. 4 P

Eine zweite Werkstoffkonstante „Festigkeit“ kann gemessen werden. Werkstücke werden als „fest“ bezeichnet, wenn sie eine Mindest-Festigkeit aufweisen. Werkstücke werden als „elastisch“ bezeichnet, wenn X_E größer als der Erwartungswert μ ist.

Im Rahmen einer zweiten Untersuchung werden die Werkstücke der obigen Stichprobe auf „Festigkeit“ hin untersucht. Von den untersuchten Werkstücken waren 40 % der „elastischen“ Werkstücke „fest“, hingegen wurden 45 % der „nicht-elastischen“ Werkstücke als „nicht-fest“ ermittelt.

- 3.6 Zeigen Sie, dass die Ereignisse „elastisch“ und „fest“ stochastisch abhängig sind und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes „festes“ Werkstück auch „elastisch“ ist. 10 P

Gesamtpunkte Aufgabe 3 45



GAUSSsche Integralfunktion $\Phi(z)$

$$(\Phi(-z) = 1 - \Phi(z))$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	5000	0,40	6554	0,80	7881	1,20	8849	1,60	9452	2,00	9772	2,40	9918	2,80	9974
0,01	5040	0,41	6591	0,81	7910	1,21	8869	1,61	9463	2,01	9778	2,41	9920	2,81	9975
0,02	5080	0,42	6628	0,82	7939	1,22	8888	1,62	9474	2,02	9783	2,42	9922	2,82	9976
0,03	5120	0,43	6664	0,83	7967	1,23	8907	1,63	9484	2,03	9788	2,43	9925	2,83	9977
0,04	5160	0,44	6700	0,84	7995	1,24	8925	1,64	9495	2,04	9793	2,44	9927	2,84	9977
0,05	5199	0,45	6736	0,85	8023	1,25	8944	1,65	9505	2,05	9798	2,45	9929	2,85	9978
0,06	5239	0,46	6772	0,86	8051	1,26	8962	1,66	9515	2,06	9803	2,46	9931	2,86	9979
0,07	5279	0,47	6808	0,87	8078	1,27	8980	1,67	9525	2,07	9808	2,47	9932	2,87	9979
0,08	5319	0,48	6844	0,88	8106	1,28	8997	1,68	9535	2,08	9812	2,48	9934	2,88	9980
0,09	5359	0,49	6879	0,89	8133	1,29	9015	1,69	9545	2,09	9817	2,49	9936	2,89	9981
0,10	5398	0,50	6915	0,90	8159	1,30	9032	1,70	9554	2,10	9821	2,50	9938	2,90	9981
0,11	5438	0,51	6950	0,91	8186	1,31	9049	1,71	9564	2,11	9826	2,51	9940	2,91	9982
0,12	5478	0,52	6985	0,92	8212	1,32	9066	1,72	9573	2,12	9830	2,52	9941	2,92	9982
0,13	5517	0,53	7019	0,93	8238	1,33	9082	1,73	9582	2,13	9834	2,53	9943	2,93	9983
0,14	5557	0,54	7054	0,94	8264	1,34	9099	1,74	9591	2,14	9838	2,54	9945	2,94	9984
0,15	5596	0,55	7088	0,95	8289	1,35	9115	1,75	9599	2,15	9842	2,55	9946	2,95	9984
0,16	5636	0,56	7123	0,96	8315	1,36	9131	1,76	9608	2,16	9846	2,56	9948	2,96	9985
0,17	5675	0,57	7157	0,97	8340	1,37	9147	1,77	9616	2,17	9850	2,57	9949	2,97	9985
0,18	5714	0,58	7190	0,98	8365	1,38	9162	1,78	9625	2,18	9854	2,58	9951	2,98	9986
0,19	5753	0,59	7224	0,99	8389	1,39	9177	1,79	9633	2,19	9857	2,59	9952	2,99	9986
0,20	5793	0,60	7257	1,00	8413	1,40	9192	1,80	9641	2,20	9861	2,60	9953	3,00	9987
0,21	5832	0,61	7291	1,01	8438	1,41	9207	1,81	9649	2,21	9864	2,61	9955	3,01	9987
0,22	5871	0,62	7324	1,02	8461	1,42	9222	1,82	9656	2,22	9868	2,62	9956	3,02	9987
0,23	5910	0,63	7357	1,03	8485	1,43	9236	1,83	9664	2,23	9871	2,63	9957	3,03	9988
0,24	5948	0,64	7389	1,04	8508	1,44	9251	1,84	9671	2,24	9875	2,64	9959	3,04	9988
0,25	5987	0,65	7422	1,05	8531	1,45	9265	1,85	9678	2,25	9878	2,65	9960	3,05	9989
0,26	6026	0,66	7454	1,06	8554	1,46	9279	1,86	9686	2,26	9881	2,66	9961	3,06	9989
0,27	6064	0,67	7486	1,07	8577	1,47	9292	1,87	9693	2,27	9884	2,67	9962	3,07	9989
0,28	6103	0,68	7517	1,08	8599	1,48	9306	1,88	9699	2,28	9887	2,68	9963	3,08	9990
0,29	6141	0,69	7549	1,09	8621	1,49	9319	1,89	9706	2,29	9890	2,69	9964	3,09	9990
0,30	6179	0,70	7580	1,10	8643	1,50	9332	1,90	9713	2,30	9893	2,70	9965	3,10	9990
0,31	6217	0,71	7611	1,11	8665	1,51	9345	1,91	9719	2,31	9896	2,71	9966	3,11	9991
0,32	6255	0,72	7642	1,12	8686	1,52	9357	1,92	9726	2,32	9898	2,72	9967	3,12	9991
0,33	6293	0,73	7673	1,13	8708	1,53	9370	1,93	9732	2,33	9901	2,73	9968	3,13	9991
0,34	6331	0,74	7704	1,14	8729	1,54	9382	1,94	9738	2,34	9904	2,74	9969	3,14	9992
0,35	6368	0,75	7734	1,15	8749	1,55	9394	1,95	9744	2,35	9906	2,75	9970	3,15	9992
0,36	6406	0,76	7764	1,16	8770	1,56	9406	1,96	9750	2,36	9909	2,76	9971	3,16	9992
0,37	6443	0,77	7794	1,17	8790	1,57	9418	1,97	9756	2,37	9911	2,77	9972	3,17	9992
0,38	6480	0,78	7823	1,18	8810	1,58	9429	1,98	9761	2,38	9913	2,78	9973	3,18	9993
0,39	6517	0,79	7852	1,19	8830	1,59	9441	1,99	9767	2,39	9916	2,79	9974	3,19	9993



Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Materialien: eigene Anfertigung der Kommission

Zugelassene Hilfsmittel

Für den Aufgabensatz 1 (ohne CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 zugelassen:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten (Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.)
- Tabellierte kumulierte Binomialverteilung
- Nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner

Für den Aufgabensatz 1 (ohne CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
- Computeralgebrasysteme
- Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------