



BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2011

Weiterer Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Technik

Aufgabenstellung

Aufgabe 1 (Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

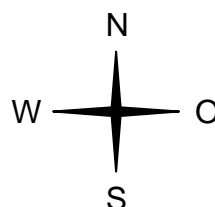
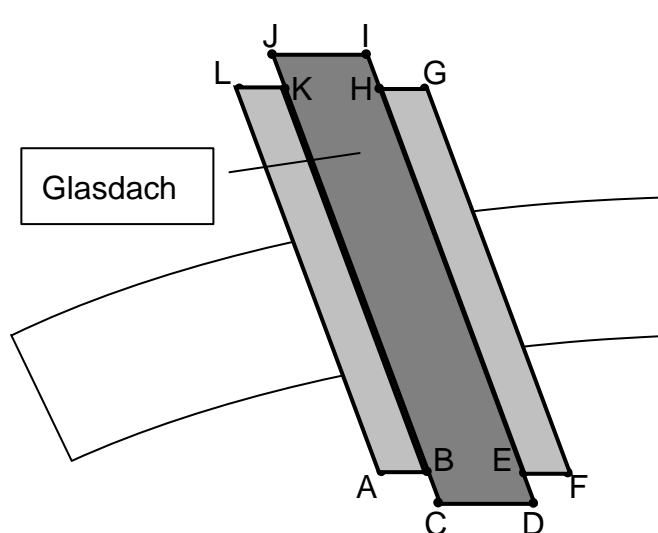
Nach mehr als zehnjähriger Bauzeit wurde im Jahr 2006 der neue Berliner Hauptbahnhof eröffnet.

Über den in Ost-West-Richtung verlaufenden Gleisen der Stadtbahn liegt das Hauptgebäude. Es besteht aus zwei zueinander parallelen Bürogebäuden, die auf den unteren Etagen durch die glasüberdachte Bahnhofshalle verbunden sind.



Das aus der Vogelperspektive parallelogrammförmige Glasdach der Bahnhofshalle ragt an Nord- und Südausgang jeweils mehrere Meter über die Halle hinaus und wird von Stahlseilen gehalten, die an den Bürogebäuden fixiert sind.

Die folgende Skizze zeigt eine Aufsicht des Bahnhofs:



In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Längeneinheit einem Meter entspricht und die Gebäude senkrecht zur x_1 - x_2 -Ebene stehen, haben die Eckpunkte C, D, I des Glasdachs folgende Koordinaten: C(200 | 120 | 30), D(200 | 160 | 30), I(10 | 80 | 30).

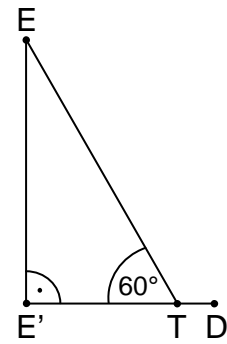
Die Wandstärken werden bei der Berechnung vernachlässigt, so dass die Kante BK des westlichen Bürogebäudes genau über der westlichen Kante CJ des Glasdaches liegt. Entsprechend liegt die Kante EH über der Kante DI. Der Punkt E hat folgende Koordinaten: E(181 | 152 | 50).

Für die Statikbestimmung ist die Berechnung einiger Werte notwendig.

- 1.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes J des Glasdachs. **(4 Punkte)**
- 1.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 , in der die westliche Wand des östlichen Bürogebäudes liegt. In dieser Ebene liegen die Punkte D, E, H und I. Zeigen Sie die Übereinstimmung mit der Koordinatengleichung

$$E_1 : 8 \cdot x_1 - 19 \cdot x_2 = -1440$$
(11 Punkte)
- 1.3 Das Glasdach stellt aus der Vogelperspektive ein Parallelogramm dar. Berechnen Sie die Innenwinkel dieses Parallelogramms und den Abstand der beiden Bürogebäude. **(12 Punkte)**

Eines der Stahlseile, welche das Glasdach tragen, ist zwischen dem Eckpunkt E des Bürogebäudes und einem Punkt T auf dem südlich hinausragenden Teil der Kante DI gespannt.



- 1.4 Begründen Sie, dass der Punkt T auf der Geraden mit der Geradengleichung

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 181 \\ 152 \\ 30 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ liegt.}$$
(7 Punkte)
- 1.5 Der Winkel, den das Stahlseil mit der Kante des Glasdachs einschließt, soll 60° betragen. Leiten Sie einen Wert für den Parameter t des Punktes $T(181 + 19t \mid 152 + 8t \mid 30)$ her, so dass die Bedingung an den Winkel erfüllt ist.

(11 Punkte)

Aufgabe 2

(Stochastik, Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Die Firma „Schraub & Locker“ stellt Akkuschrauber der Typen A, B und C her.

- 2.1 Bei der Produktion der Schrauber vom Typ A treten die Fehler F_1 und F_2 unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten 0,05 und 0,02 auf. Ein Akkuschrauber des Typs A wird zufällig der Produktion entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1 : Das Gerät hat mindestens einen Fehler

E_2 : Das Gerät hat beide Fehler

E_3 : Das Gerät ist fehlerfrei

(6 Punkte)

- 2.2 Auch bei der Produktion der Schrauber vom Typ B treten zwei Fehler F_3 und F_4 auf.

Der Fehler F_3 kommt mit der Wahrscheinlichkeit 0,03 und der Fehler F_4 mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 vor. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schrauber vom Typ B beide Fehler aufweist beträgt 0,001.

Ermitteln Sie rechnerisch, ob die Fehler F_3 und F_4 unabhängig voneinander auftreten.

(4 Punkte)

Bei der Produktion der Schrauber vom Typ C ist ein Gerät mit der Wahrscheinlichkeit von 0,05 defekt.

- 2.3 Aus der laufenden Produktion werden zufällig 20 Geräte ausgewählt. Geben Sie eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X : „Anzahl der defekten Geräte“ an und erläutern Sie die Wahl der Verteilung.

(6 Punkte)

- 2.4 Ein Großhandelsabnehmer kauft 100 Schrauber des Typs C, verlangt aber eine Garantie, dass mindestens 90 der gekauften Geräte einwandfrei sind. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung die Garantiebedingungen nicht erfüllt.

(5 Punkte)

- 2.5 Eine Baumarktkette plant eine größere Abnahme, verlangt jedoch vor Vertragsabschluss die folgende zweistufige Qualitätskontrolle der laufenden Produktion:

Zunächst wird eine Stichprobe vom Umfang 10 genommen. Sind darunter mindestens 2 defekte Geräte, kommt der Vertrag nicht zustande.

Im anderen Fall wird zusätzlich eine zweite Stichprobe vom Umfang 10 genommen. Enthalten erste und zweite Stichprobe zusammen weniger als 3 defekte Geräte, kommt der Vertrag zustande, ansonsten wird dieser nicht geschlossen.

Zeigen Sie, dass der Vertrag mit einer Wahrscheinlichkeit größer 0,8 zustande kommt.

(10 Punkte)



Die Marketingabteilung von „Schraub & Locker“ will ihren seit Jahren bei 20 % stagnierenden Marktanteil vergrößern. Es wird eine Werbekampagne durchgeführt, nach deren Abschluss 100 Käufer eines Akkuschraubers nach ihrem Kaufverhalten befragt werden. Die Geschäftsführung behauptet, die Werbung sei unwirksam gewesen, diese Hypothese soll getestet werden.

2.6 Beschreiben Sie zunächst die bei diesem Test möglichen Fehler im konkreten Sachzusammenhang. **(6 Punkte)**

2.7 Bei der Durchführung einer Befragung antworten 25 Personen, dass sie ein Gerät des Herstellers „Schraub & Locker“ gekauft haben. Beurteilen Sie, ob aufgrund des Ergebnisses dieser Umfrage auf dem Signifikanzniveau von 0,05 die Behauptung der Geschäftsführung verworfen werden kann. **(8 Punkte)**

Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n=100$:

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
100	0	1326	0476	0169	0059	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99	100
	1	4033	1946	0872	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98	
	2	6767	4198	2321	1183	0019	0002	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97	
	3	8590	6472	4295	2578	0078	0009	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96	
	4	9492	8179	6289	4360	0237	0035	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	95	
	5	9845	9192	7884	6160	0576	0106	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	94	
	6	9959	9688	8936	7660	1172	0267	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	93	
	7	9991	9894	9525	8720	2061	0576	0038	0003	0000	0000	0000	0000	0000	92	
	8	9998	9968	9810	9369	3209	1088	0095	0009	0000	0000	0000	0000	0000	91	
	9		9991	9932	9718	4513	1837	0213	0023	0000	0000	0000	0000	0000	90	
	10		9998	9978	9885	5832	2810	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000	89	
	11			9993	9957	7030	3947	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	88	
	12			9998	9985	8018	5152	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	87	
	13				9995	8761	6318	2000	0469	0025	0001	0000	0000	0000	86	
	14				9999	9274	7352	2874	0804	0054	0002	0000	0000	0000	85	
	15					9601	8199	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	84	
	16					9794	8842	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	83	
	17					9900	9296	5994	2712	0376	0022	0002	0000	0000	82	
	18					9954	9595	6965	3621	0630	0045	0005	0000	0000	81	
	19					9980	9780	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	80	
	20					9992	9886	8481	5595	1488	0165	0024	0000	0000	79	
	21					9997	9944	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	78	
	22					9999	9974	9369	7389	2864	0479	0091	0001	0000	77	
	23						9989	9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	76	
	24						9995	9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	75	
	25						9998	9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	74	
	26						9999	9938	9442	6417	2244	0715	0024	0000	73	
	27							9969	9658	7224	2964	1066	0046	0000	72	
	28							9985	9800	7925	3768	1524	0084	0000	71	
	29							9993	9888	8505	4623	2093	0148	0000	70	
	30							9997	9939	8962	5491	2766	0248	0000	69	
	31							9999	9969	9307	6331	3525	0398	0001	68	
	32								9984	9554	7107	4344	0615	0002	67	
	33								9993	9724	7793	5188	0913	0004	66	
	34								9997	9836	8371	6019	1303	0009	65	
	35								9999	9906	8839	6803	1795	0018	64	
	36								9999	9948	9201	7511	2386	0033	63	
	37									9973	9470	8123	3068	0060	62	



	38										9986	9660	8630	3822	0105	61
	39										9993	9790	9034	4621	0176	60
	40										9997	9875	9341	5433	0284	59
	41										9999	9928	9566	6225	0443	58
	42										9999	9960	9724	6967	0666	57
	43											9979	9831	7635	0967	56
	44											9989	9900	8211	1356	55
	45											9995	9943	8689	1841	54
	46											9997	9969	9070	2421	53
	47											9999	9983	9362	3086	52
	48											9999	9991	9577	3822	51
	49												9996	9729	4602	50
	50												9998	9832	5398	49
	51												9999	9900	6178	48
	52													9942	6914	47
	53													9968	7579	46
	54													9983	8159	45
55													9991	8644	44	
56													9996	9033	43	
57													9998	9334	42	
58													9999	9557	41	
59														9716	40	
60														9824	39	
61														9895	38	
62														9940	37	
63														9967	36	
64														9982	35	
65														9991	34	
66														9996	33	
67														9998	32	
68														9999	31	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n

Hinweis: Für Wahrscheinlichkeiten $p > 0,5$ lassen sich die untere Zeile und die rechte Spalte verwenden. Dabei gilt $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - \text{"abgelesener Wert"}$

Auswahlaufgabe 3

(Analysis ohne CAS, Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Ein defektes Drehteil (Rolle) ist zu ersetzen. Das ursprüngliche Teil ist noch auf einer konventionellen Drehmaschine hergestellt worden. Technische Zeichnungen mit Maßangaben sind nicht mehr vorhanden. Deshalb sind die Maße an einigen Stellen abgenommen worden (s. Tabelle). Zur Digitalisierung soll die Kontur (ohne die beiden Zapfen rechts und links) mathematisch beschrieben werden.



Maß vom linken Rand in mm	0	10	25	50 (rechter Rand)
Durchmesser in mm	50	30	20	30

3.1 Skizzieren Sie mit den Tabellenwerten den oberen Teil der Kontur ohne die beiden Zapfen rechts und links in einem Koordinatensystem. **(4 Punkte)**

3.2 Der obere Teil der Kontur soll durch den Graphen einer Funktion 3. Grades dargestellt werden.
Stellen Sie das Gleichungssystem auf, welches Ihnen ermöglicht, die Koeffizienten dieser Funktion zu bestimmen. Eine Lösung des Gleichungssystems ist nicht erforderlich. **(5 Punkte)**

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{3750}x^3 + \frac{9}{250}x^2 - \frac{4}{3}x + 25 \quad x \in [0; 50]$$

zur Beschreibung des oberen Teils der Kontur.

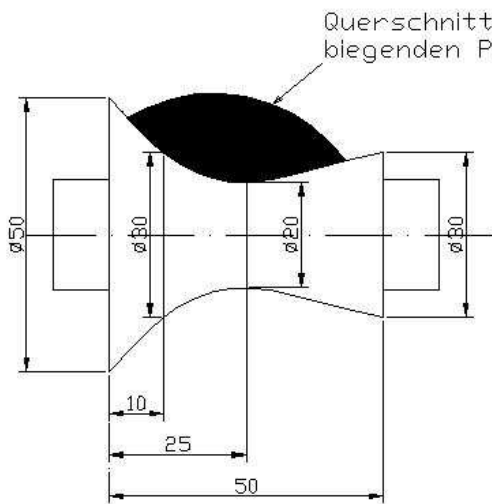
3.3 Berechnen Sie den minimalen Durchmesser des Drehteils. **(6 Punkte)**

3.4 Weisen Sie nach, dass der obere Teil der Kontur kein einheitliches Krümmungsverhalten besitzt. **(6 Punkte)**

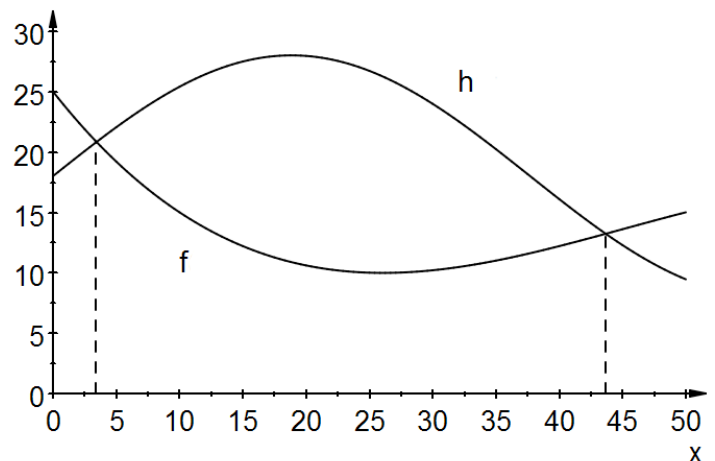
3.5 Die allgemeine Funktion 3. Grades g ist durch $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Untersuchen Sie den Einfluss der Koeffizienten c und d auf die Wendestellen des Graphen.
Leiten Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b her, so dass $x_w = 30$ eine Wendestelle ist. **(4 Punkte)**

Die Rolle wird in einer Biegevorrichtung verwendet, um einen Profilstab zu biegen. Der Querschnitt des zu biegenden Materials wird an der Unterseite im Bereich von x_1 (linke Grenze) bis x_2 (rechte Grenze) durch die Kontur der Rolle begrenzt. Die Oberseite wird durch die Funktion h beschrieben:

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left(\frac{x}{12}\right) + 18 \quad x \in \mathbb{R}$$



technische Zeichnung



Darstellung durch die Funktionen

- 3.6 Die linke Grenze x_1 lässt sich mit dem Newtonverfahren bestimmen. Erläutern Sie, wie sich dieses Verfahren auf die Problemstellung anwenden lässt. Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift, die sich unter Verwendung der gegebenen Funktionsterme von f und h ergibt; die notwendigen Ableitungen sind zu bilden, die Iterationsschritte sind nicht durchzuführen.

(8 Punkte)

- 3.7 Zeigen Sie, dass das Maß der Querschnittsfläche des über die Rolle laufenden Profils unter Verwendung der Grenzen $x_1 = 3,4$ und $x_2 = 43,7$ einen Wert von etwa 446 mm^2 annimmt.

Zusatzinformation: Die Funktionen h und f schneiden sich zwischen x_1 und x_2 nicht.

Begründen Sie, warum die Zusatzinformation oder die Angabe möglicher weiterer Schnittstellen zur Berechnung der Querschnittsfläche notwendig ist.

(12 Punkte)



Materialgrundlage

Luftbild des Bahnhofs Berlin:

[http://www.stadtentwicklung.berlin.de/planen/stadtmodelle/de/datenbank/mediu
m.php?MediumID=11349](http://www.stadtentwicklung.berlin.de/planen/stadtmodelle/de/datenbank/mediu
m.php?MediumID=11349)

Frontansicht des Bahnhofs Berlin:

<http://www.bahnbilder.de/bilder/berlin-hauptbahnhof-lehrter-bahnhof-109371.jpg>

Abbildungen Aufgabe 3 und 4:

vom Autor und der Aufgabenkommission erstellte Bilder und Grafiken

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit:	255 Minuten
zusätzliche Auswahlzeit:	keine

Auswahlaufgabe 4

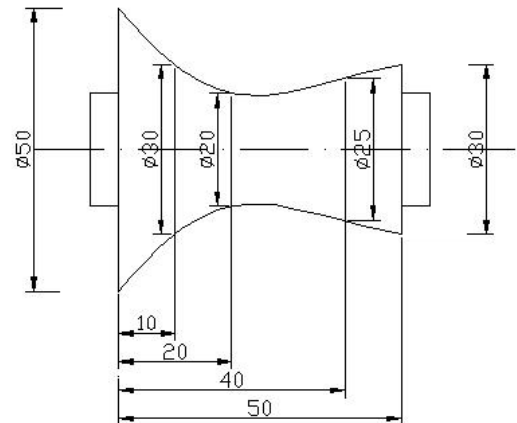
(Analysis mit CAS, Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Ein defektes Drehteil ist zu ersetzen. Das ursprüngliche Teil ist noch auf einer konventionellen Drehmaschine hergestellt worden. Technische Zeichnungen mit Maßangaben sind nicht mehr vorhanden. Deshalb sind die Durchmesser an einigen Stellen bestimmt worden (s. Tabelle). Zur Digitalisierung soll die obere Kontur (ohne die beiden Zapfen rechts und links) mathematisch beschrieben werden.



Maß vom linken Rand in mm	0	10	20	40	50 (rechter Rand)
Durchmesser in mm	50	30	20	25	30



4.1 Der obere Teil der Kontur soll durch den Graphen einer Funktion 4. Grades modelliert werden.

Stellen Sie die entsprechende Funktionsgleichung auf.

(6 Punkte)

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{160000} \cdot x^4 + \frac{1}{3000} \cdot x^3 + \frac{31}{1600} \cdot x^2 - \frac{293}{240} \cdot x + 25 \quad x \in \mathbb{R}$$

4.2 Stellen Sie die gemessenen Daten und den Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem dar.

(5 Punkte)

4.3 Berechnen Sie unter Verwendung der Funktion f den minimalen Durchmesser des Drehteils.

(6 Punkte)

4.4 Weisen Sie nach, dass der obere Teil der Kontur kein einheitliches Krümmungsverhalten besitzt. **(6 Punkte)**

4.5 Ermitteln Sie das Volumen des Drehteils, wenn die beiden Zapfen rechts und links eine Länge von 5 mm und einen Durchmesser von 20 mm haben. **(6 Punkte)**

Die Funktion f ist im Bereich zwischen den Stellen $x_3 = 20$ und $x_5 = 50$ nicht gut geeignet, um das Drehteil zu approximieren, da eine „unnatürliche Krümmung“ auftritt. Um dies zu vermeiden, soll das Drehteil zwischen diesen Punkten durch zwei ganzrationale Funktionen 3. Grades beschrieben werden. Die Funktion s_1 wird für $x \in [20; 40]$ und die Funktion s_2 für $x \in [40; 50]$ verwendet.

Die Funktion s_1 schließt an der Stelle x_3 einmal stetig differenzierbar d.h. knickfrei an die Funktion f an. Der Übergang zwischen den Funktionen s_1 und s_2 an der Stelle $x_4 = 40$ soll zweimal stetig differenzierbar sein, d.h. auch die Werte der zweiten Ableitungen sollen an der Stelle x_4 übereinstimmen. An der Stelle x_5 soll s_2 krümmungsfrei sein.

4.6 Leiten Sie die Bedingungen für das Aufstellen der Funktionsgleichungen der Funktionen s_1 und s_2 her und bestimmen Sie diese. **(9 Punkte)**

4.7 Die Krümmung einer Funktion f ist wie folgt definiert:

$$K(x) = \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Vergleichen Sie im Intervall $[40; 50]$ die Krümmung der Funktion f mit der

Krümmung der Funktion s_2 mit $s_2(x) = \frac{29}{240000} \cdot x^3 - \frac{29}{1600} \cdot x^2 + \frac{1373}{1200} \cdot x - 12$

anhand einer geeigneten graphischen Darstellung.

Beurteilen Sie die Näherung durch s_2 im Hinblick auf eine geringere Krümmung des Drehteils in diesem Bereich.

(7 Punkte)



Materialgrundlage

Luftbild des Bahnhofs Berlin:

[http://www.stadtentwicklung.berlin.de/planen/stadtmodelle/de/datenbank/mediu
m.php?MediumID=11349](http://www.stadtentwicklung.berlin.de/planen/stadtmodelle/de/datenbank/mediu
m.php?MediumID=11349)

Frontansicht des Bahnhofs Berlin:

<http://www.bahnbilder.de/bilder/berlin-hauptbahnhof-lehrter-bahnhof-109371.jpg>

Abbildungen Aufgabe 3 und 4:

vom Autor und der Aufgabenkommission erstellte Bilder und Grafiken

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit:	255 Minuten
zusätzliche Auswahlzeit:	keine