



Zentrale Abiturprüfung 2009

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

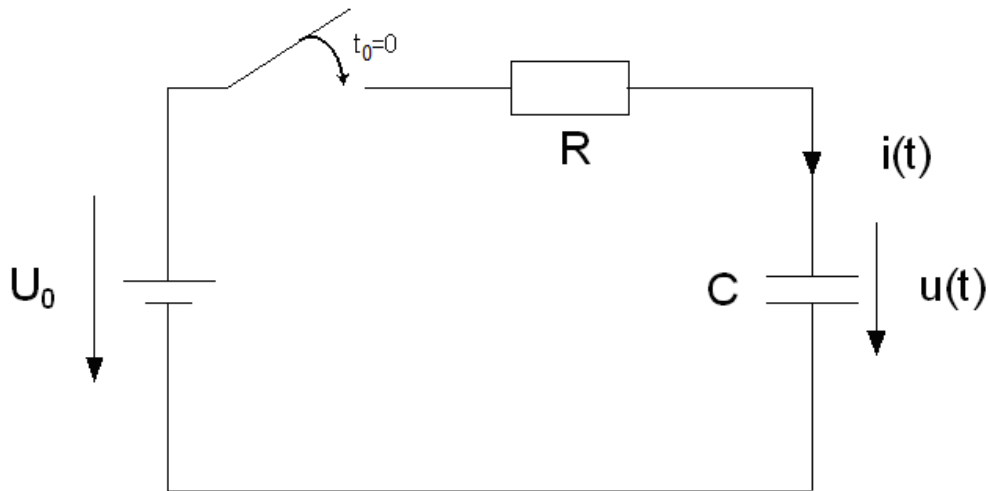
Fachbereich Technik

Aufgabenstellung

Aufgabe 1

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Im Folgenden soll der Ladevorgang eines Kondensators genauer untersucht werden. Ein idealer Kondensator mit der Kapazität C wird über einen Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. Die Gleichspannungsquelle liefert die konstante Spannung U_0 . Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, wenn der Schalter geschlossen wird (vgl. untenstehende Abb.).



Für die Stromstärke und Spannung am Kondensator gilt beim Ladevorgang:

Spannung u : $u(t) = 200 \cdot (1 - e^{-\frac{5}{8}t})$ t in s, $u(t)$ in V

Stromstärke i : $i(t) = \frac{1}{500} \cdot e^{-\frac{5}{8}t}$ t in s, $i(t)$ in A

- 1.1 Skizzieren Sie die Graphen der Spannung u und der Stromstärke i im Intervall $[0; 10]$. **(7 Punkte)**
- 1.2 Die Tangente an den Graphen der Funktion $i(t)$ an der Stelle 0 schneidet die t -Achse bei $t_1 = \tau$. Zeigen Sie, dass gilt: $\tau = 1,6$. Näherungsweise erreicht der Kondensator nach einer Zeit von 5τ seine Maximalspannung. Vergleichen Sie diesen Wert mit der theoretisch erreichbaren Maximalspannung von 200 V. **(10 Punkte)**
- 1.3 Berechnen Sie den Mittelwert der Stromstärke i in den ersten 5 Sekunden des Ladevorganges.



Hinweis: Allgemein gilt für den Mittelwert \bar{f} einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ **(9 Punkte)**

- 1.4 Die Leistung p am Kondensator berechnet sich zu $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Berechnen Sie die maximale Leistung und den Zeitpunkt, an dem diese erreicht wird. **(9 Punkte)**

- 1.5 Allgemein verhalten sich Stromstärke i und Spannung u beim Ladevorgang am Kondensator mit der konstanten Kapazität C über den konstanten Widerstand R nach folgenden Gesetzmäßigkeiten:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Zeigen Sie anhand dieser Gesetzmäßigkeiten, dass sich die Energie W , die ein an eine Gleichspannungsquelle angeschlossener Kondensator maximal aufnehmen kann (also bei „unendlich langer Ladezeit“) zu $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$ berechnet.

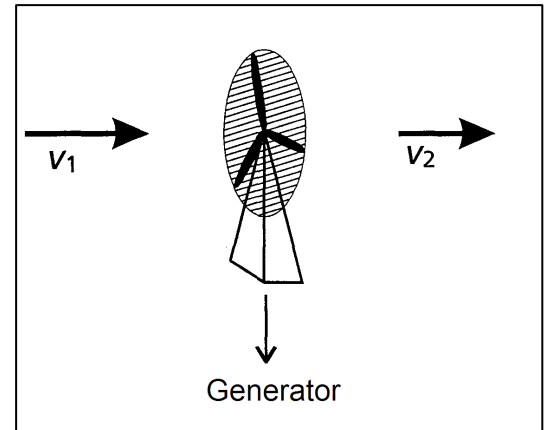
Hinweis: Für die Energie W , die ein Kondensator bis zur Zeit $t = t_E$ aufnimmt,

gilt allgemein: $W(t_E) = \int_0^{t_E} p(t) dt$ mit $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ **(10 Punkte)**

Aufgabe 2

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Bei der Energiegewinnung mit einem Windrad strömt die Luft mit der Geschwindigkeit v_1 auf das Windrad zu und mit der Geschwindigkeit v_2 vom Windrad weg. Da ein Windrad der Luft Bewegungsenergie entnimmt, um z.B. mit einem angeschlossenen Generator elektrische Energie zu erzeugen, muss $v_2 < v_1$ sein. Das Windrad kann der Luft nicht die gesamte Energie entnehmen, denn je kleiner v_2 ist, desto weniger Luft kann durch das Windrad strömen, so dass die Geschwindigkeit v_2 immer größer als 0 ist.



Der Wirkungsgrad $\eta(a)$ des Windrades wird durch das Verhältnis $a = \frac{v_2}{v_1}$ bestimmt:

$$\eta(a) = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

- 2.1 Bestimmen Sie begründet einen der Situation entsprechenden sinnvollen Definitionsbereich der Funktion $\eta(a)$. **(7 Punkte)**
- 2.2 Skizzieren Sie den Graphen des Wirkungsgrades η im Intervall $]0; 1]$. **(6 Punkte)**
- 2.3 Berechnen Sie den maximalen Wirkungsgrad η_{\max} des Windrades. **(10 Punkte)**
- 2.4 Die Wendestelle liegt nicht im Definitionsbereich. Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion $\eta(a)$ für $a \in \mathbb{R}$. **(9 Punkte)**
- 2.5 Das Verhältnis a kann durch die Änderung der Flügelstellung beeinflusst werden. Im Rahmen eines Tests wird das Windrad kontinuierlich im Bereich von $a_1=0,2$ bis $a_2=0,6$ betrieben.

Für n einzelne Messwerte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ lässt sich das arithmetische Mittel durch

$$\bar{\eta}^* = \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \text{ bestimmen. Begründen Sie, dass der Mittel-}$$

wert $\bar{\eta}$ der stetigen Funktion $\eta(a)$ durch

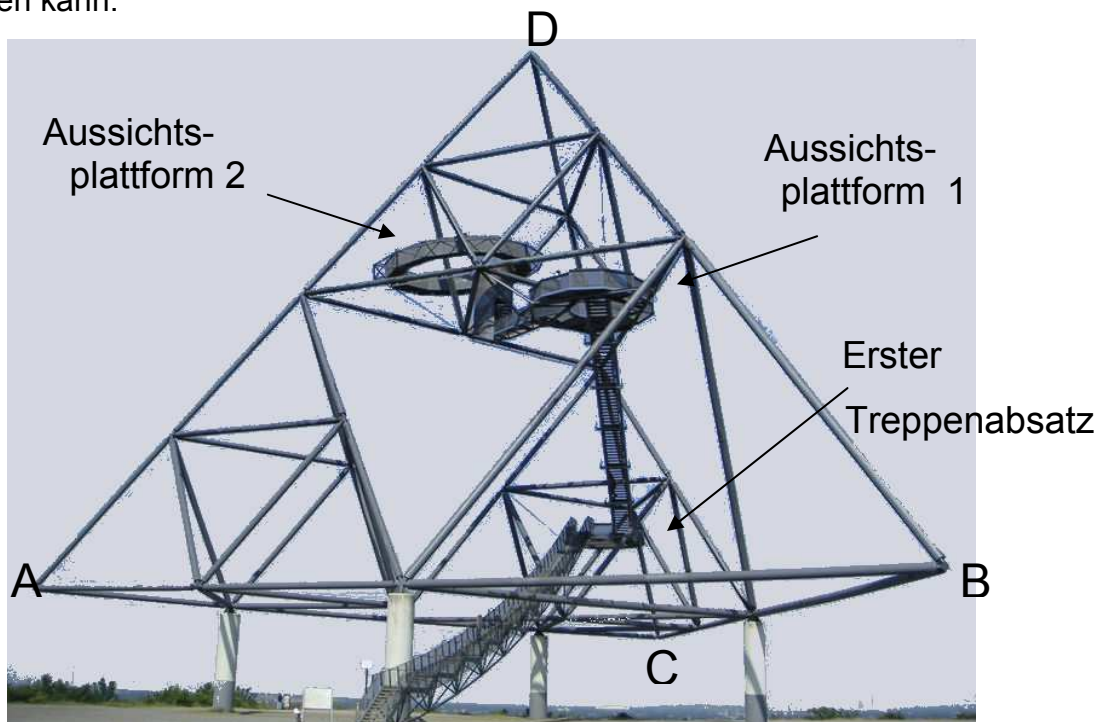
$$\bar{\eta} = \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot \int_{a_1}^{a_2} \eta(a) da$$

gegeben ist und berechnen Sie den Mittelwert des Wirkungsgrades während des Tests. **(13 Punkte)**

Auswahlaufgabe 3

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Auf einer Halde eines ehemaligen Zechengeländes steht ein Wahrzeichen des Ruhrgebietes: das Tetraeder in Bottrop. Über Treppen lassen sich zwei Aussichtsplattformen erreichen, so dass man von dort einen wunderbaren Blick über das Ruhrgebiet genießen kann.



Das Tetraeder in Bottrop besteht aus vier annähernd gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge $l = 60$ m. Es steht auf vier Stützpfeilern, die jeweils 8 m hoch sind. Die Eckpunkte des Tetraeders sind $A(0 \mid 0 \mid 8)$, $B(60 \mid 0 \mid 8)$, $C(30 \mid 52 \mid 8)$ und $D(30 \mid 17\frac{1}{3} \mid 57)$. Um die Berechnungen zu vereinfachen, sind einige dieser Werte gerundet angegeben (in Metern).

- 3.1 Der erste Treppenabsatz liegt in einer Ebene E_1 . Die Punkte $P_1(15 \mid 11 \mid 20)$, $P_2(18 \mid 7 \mid 20)$ und $P_3(12 \mid 7 \mid 20)$ liegen in dieser Ebene E_1 . Bestimmen Sie die zugehörige Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform. **(8 Punkte)**
- 3.2 Die Aussichtsplattform 1 ist über eine Treppe erreichbar, die von Punkt $P_1(15 \mid 11 \mid 20)$ zum Punkt $Q_1(28 \mid 23 \mid 38)$ führt. Bestimmen Sie die Geradengleichung, mit der sich diese Treppe beschreiben lässt. Berechnen Sie den Winkel der Geraden zur Ebene 1 (Kontrollergebnis: $E_1: x_3=20$). **(8 Punkte)**
- 3.3 Die Punkte $R_1(33 \mid 9 \mid 42)$, $R_2(33 \mid 19 \mid 40,5)$ und $R_3(29 \mid 11 \mid 41,5)$ liegen in der Ebene E_2 der geneigten Aussichtsplattform 2. Die Plattform besteht annähernd aus einem Kreisring mit dem Außendurchmesser $d = 11$ m. Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Neigungswinkel der Plattform. Zeigen Sie, dass der maximale Höhenunterschied dieses Ringes ca. 1,72 m beträgt. **(12 Punkte)**



- 3.4 Ein Künstler möchte das Tetraeder einschließlich seiner Grundfläche mit Stoff verhüllen. Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Stoff benötigt werden. (Die Stützen bleiben sichtbar, die Dreiecke des Tetraeders können näherungsweise als flächengleich betrachtet werden.) **(8 Punkte)**
- 3.5 Um den Aufstieg zu ermöglichen, muss in der Verkleidung der Grundfläche eine Öffnung bleiben. Zur Ortsbestimmung dieser Öffnung wird die gebogene Aufstiegstreppe zum ersten Treppenabsatz durch eine Gerade durch die Punkte $S(50 \mid 33 \mid 0)$ und $P_2(18 \mid 7 \mid 20)$ angenähert. Zeigen Sie rechnerisch, an welcher Stelle der Verkleidung der Grundfläche eine Öffnung für die Treppe freigehalten werden muss. **(9 Punkte)**

Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**

Auswahlaufgabe 4

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Ein RAID-System („redundant array of independent disks“) ist ein aus mehreren Festplatten bestehendes Speichersystem und gewährleistet eine höhere Datensicherheit.

Das hier betrachtete, vereinfachte RAID-System funktioniert wie folgt:

Jedes Byte besteht aus acht Bit (deren jeweiliger Wert ist „0“ oder „1“). Diese acht Bit werden nicht mehr auf einer einzelnen Festplatte, sondern getrennt auf acht voneinander unabhängigen Festplatten gespeichert. Auf einer neunten Festplatte wird zu jedem Byte ein zusätzliches „Kontroll-Bit“ gespeichert, und zwar mit dem Wert „1“, wenn das entsprechende Byte auf den 8 übrigen Festplatten aus einer ungeraden Anzahl von Einsen besteht, und mit dem Wert „0“, wenn es aus einer geraden Anzahl von Einsen besteht.



Fällt eine Festplatte aus, kann diese durch eine neue Festplatte ersetzt werden, und der Inhalt der ausgefallenen Festplatte kann sofort rekonstruiert werden. Problematisch wird es, wenn zwei (oder mehr) Festplatten ausfallen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte der Firma Datasafe innerhalb eines Zeitraumes von einem Jahr nicht ausfällt, beträgt $p = 0,8641$.

- 4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitraum von einem Jahr zwei oder mehr Festplatten ausfallen. **(7 Punkte)**
- 4.2 Erläutern Sie, warum es sich bei der Verteilung der Zufallsgröße X : „Anzahl der in einem Jahr ausgefallenen Platten“ um eine Binomialverteilung handelt. Berechnen Sie für den Zeitraum von einem Jahr den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße X . **(7 Punkte)**
- 4.3 Da eine tägliche Sicherung des RAID stattfindet, treten unwiederbringliche Datenverluste nur auf, wenn zwei oder mehr Festplatten am gleichen Tag ausfallen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Festplatte an einem bestimmten Tag ausfällt, beträgt $p = 0,0004$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das RAID-System an einem bestimmten Tag mit unwiederbringlichen Datenverlusten ausfällt.
Die Wahrscheinlichkeit des Datenverlustes bei Speicherung auf einer einzigen Festplatte ist um ein Vielfaches größer, als bei der Speicherung auf einem RAID-System. Bestimmen Sie diesen Faktor. **(10 Punkte)**



Beachten Sie für die Teilaufgaben 4.4 und 4.5 die folgende Zusatzinformation:

Die Firma Datasafe arbeitet bei ihrer Produktion sehr zuverlässig, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis D: „eine Festplatte ist defekt“ beträgt 0,015.

4.4 Die Qualitätskontrolle vermutet: „Bei einer Abnahme durch einen Großkunden ist die Wahrscheinlichkeit bei einer zufälligen Auslieferung mindestens eine defekte Festplatte zu erhalten größer als 0,99.“ Zeigen Sie rechnerisch bei welcher Abnahmemenge die Wahrscheinlichkeit diesen Wert von 0,99 übersteigt.
(10 Punkte)

4.5 Die Aussonderung der defekten Festplatten erfolgt in der Qualitätskontrolle. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine geprüfte Festplatte einwandfrei ist und ausgesondert wird beträgt 0,012. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 wird eine Festplatte bei der Kontrolle nicht ausgesondert.
Zeigen Sie mit einer geeigneten stochastischen Darstellung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Festplatte defekt ist und ausgesondert wird 0,008 beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der eine defekte Festplatte tatsächlich ausgesondert wird.
(11 Punkte)

Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**