



**BERUFSKOLLEG**  
Berufliches Gymnasium

# **Zentrale Abiturprüfung 2011**

## **Weiterer Leistungskurs**

### **Fach Mathematik**

**Fachbereich Informatik**

Unterlagen für die Lehrkraft



## 1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Lineare Algebra/Analytische Geometrie: CAD-System
Aufgabe 2	Stochastik: Online-Rollenspiel
Auswahlaufgabe 3	Analysis ohne CAS: 2D-Computerspiel
Auswahlaufgabe 4	Analysis mit CAS: 2D-Computerspiel

## 2 Aufgabenstellung (vgl. Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler)

## 3 Materialgrundlage

Die verwendeten Grafiken sind eigenes Material.

## 4 Bezüge zu den Abiturvorgaben 2011

### Aufgabe 1 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Geraden und Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ , Darstellungsformen von Geraden und Ebenen  
Schnittpunkte und Schnittgeraden, Berechnung von Punktabständen  
Grundlagen der Matrizenrechnung. Elementare Matrizenoperationen  
Lineare Abbildungen und ihre Verkettungen, Abbildungsmatrizen und affine Abbildungen  
Eigenwerte und Eigenvektoren

### Aufgabe 2 Stochastik

Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung  
Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit nach Laplace, Rechenregeln für  
Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln  
Zufallsgrößen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung  
Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vier-Felder-Tafeln, Baumdiagramme  
Satz von Bayes, Binomialverteilung, Kenngrößen der Binomialverteilung, Erwartungswert,  
Varianz und Standardabweichung  
Hypothesentest

### Aufgaben 3 und 4 Analysis

Funktionsklassen ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und deren  
Verknüpfungen

Funktionseigenschaften: Kurvenscharen und Parameter in Funktionsvorschriften  
Abschnittsweise definierte Funktionen, Differenzierbarkeit und Stetigkeit  
Tangente und Normale, Ableitungsregeln, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte,  
Monotonie, Krümmung, Extremwertprobleme, Aufstellen von Funktionsgleichungen aus  
Bedingungen, Lineare Gleichungssysteme mit bis zu 4 Unbekannten, Splines

Integration: Bestimmung von Stammfunktionen, Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals



## 5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2011 sind zugelassen:
  - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
  - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung,
  - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2011 sind **nicht** zugelassen:
  - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
  - Computeralgebrasysteme (außer für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6)),
  - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
    - Darstellen von Funktionsgraphen
    - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
    - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
    - Rechnen mit Matrizen und Vektoren
- In der Abiturprüfung 2011 sind nur für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6) Computeralgebrasysteme als weiteres erforderliches Hilfsmittel zugelassen.

Das eingesetzte CAS sollte mindestens folgende Funktionen umfassen

- Wertetabellen erstellen
- algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- algebraische Gleichungen lösen
- lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnung durchführen
- Funktionen algebraisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darstellen

## 6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

In den weiteren Leistungskursen und in den Grundkursen im Fach Mathematik entscheidet die jeweilige Fachlehrerin / der jeweilige Fachlehrer unter Aufsicht der Schulleitung am Downloadtag, ob für alle Prüflinge ihres / seines Kurses die verbindliche Analysisaufgabe ohne Computeralgebrasystemeinsatz (Auswahlaufgabe ohne CAS) oder mit Computeralgebrasystemeinsatz (Auswahlaufgabe mit CAS) zur Verfügung gestellt wird.

Nach einer Auswahlzeit von drei Zeitstunden teilt die Fachlehrerin / der Fachlehrer der Schulleitung schriftlich die Entscheidung mit. Diese Entscheidung wird zu den Prüfungsakten genommen. Für die Prüflinge besteht keine Aufgabenauswahl. Sie erhalten keine zusätzliche Auswahlzeit.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe ohne CAS-Einsatz entscheiden, so können die drei Aufgaben in der festgelegten Bearbeitungszeit insgesamt in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe mit CAS-Einsatz entscheiden, sind folgende Hinweise zu beachten:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit die drei zu bearbeitenden Aufgaben.
- Die Schülerinnen und Schüler geben individuell nach Bearbeitung die beiden Lösungen der Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und Stochastik und ggf. Zahlentheorie ab. Im Gegenzug wird ihnen das Computeralgebrasystem zur Verfügung gestellt. Ein weiteres Bearbeiten der ersten zwei Aufgaben ist danach nicht mehr möglich. Die Abgabezeit für die Aufgaben 1 und 2 wird von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer bzw.



der aufsichtführenden Lehrkraft protokolliert.

- Für eine hinreichende Anzahl von Ersatzsystemen (PC's bzw. Handhelds) ist zu sorgen.
- Alle Systeme sind vor der Prüfung in den Urzustand zu versetzen. Zusätzliche Tools bzw. ergänzende Programme sind auf den Systemen nicht zulässig. Die Schule stellt sicher, dass keine Verbindung der Systeme untereinander sowie keine Verbindung der Systeme zum Internet vorhanden sind.
- Der Lösungsweg ist von den Schülerinnen und Schülern in der Reinschrifttextlich so zu dokumentieren, dass der Gedankengang der Problemlösung vollständig nachvollziehbar ist. Die Dokumentation ist integraler Bestandteil der Problemlösung und geht in die Bewertung der Prüfungsleistung ein.
- Wird der Computer zum Editieren von Aufgabenlösungen benutzt, muss der Prüfling zum Abschluss einen Computerausdruck seines Lösungstextes durch Unterschrift autorisieren. Die Erstellung des Computerausdrucks ist von der Schule innerhalb der Gesamtbearbeitungszeit so zu organisieren, dass beim Abgeben der Prüfungsarbeit der unterschriebene Ausdruck vorliegt. Nur der autorisierte Ausdruck ist Bestandteil der Prüfungsarbeit; die elektronische Version (Datei) kann nicht zur Korrektur oder Bewertung herangezogen werden.
- Die verwendete Technologie muss in den Prüfungsakten von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer mit Angabe des verwendeten Computeralgebrasystems bzw. Handheld-Typs mit der Version bzw. Versionsnummer vermerkt werden.

## 7 Bearbeitungszeit / Auswahlzeit

<b>Bearbeitungszeit:</b>	255 Minuten
<b>zusätzliche Auswahlzeit:</b>	keine



## 8 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### Teilleistungen – Kriterien

#### a) inhaltliche Leistung

#### Aufgabe 1

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>1.1.1</b>	<b>... überprüft das Ergebnis.</b>	
	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 + 1,5t = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 + 1,5t = 9 \Rightarrow t = 14/3$ Damit liegen beide Punkte auf der Geraden.	<b>4(II)</b>
	<b>... bestimmt anschließend eine Geradengleichung, die das CAD-System nach Eingabe der Firstpunkte <math>F_1</math> und <math>F_2</math> ermitteln könnte.</b>	
	Firstlinie: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$	<b>3(I)</b>
<b>1.1.2</b>	<b>... ermittelt die Ebenengleichung der durch die Punkte <math>T_3, T_4</math> und <math>F_1</math> gegebenen Dachebene in Koordinatenform.</b>	
	Ebene $E_{\text{Dach}}$ in Parameterform : $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ Umrechnung in die Koordinatenform: (i) $x_1 = 1 \quad + 0 \quad + t_2$ (ii) $x_2 = 9 \quad -4 \cdot t_1 \quad + 0 \quad   \cdot 3$ (iii) $x_3 = 3 \quad +3 \cdot t_1 \quad + 0 \quad   \cdot 4$ Daraus folgt, (i) $x_1$ beliebig, da $t_2 \in \mathbb{R}$ $3 \cdot \text{(ii)} + 4 \cdot \text{(iii)}: 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_2 = 39$ $\rightarrow E_1: 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 39$	<b>6(I)</b>



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1.2	... untersucht, welche maximale Abmessung in $x_2$ -Richtung die Überdachung haben darf, damit bei diesem Sonnenstand kein Schatten auf die Terrasse fällt.	
	<p>Projektionsstrahl des Lichtes auf den Punkt <math>G_3</math> : <math display="block">\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2,5 \end{pmatrix}</math></p> <p>Schnittpunkt Gerade durch <math>G_3</math> und Überdachung:  <math>x_1 = 9 + 0 \cdot t</math>  <math>x_2 = 9 - 3 \cdot t</math>  <math>x_3 = -2,5 \cdot t</math>  eingesetzt in die Ebenengleichung ergibt sich:  <math>9 - 3 \cdot t - 15 \cdot t = 27 \Rightarrow t = -1</math>  Damit darf die Überdachung maximal 3 Längeneinheiten überstehen.</p>	10(II)
1.3.1	... leitet die Gleichung der affinen Abbildung $\beta: \vec{x}'' = A\vec{x}' + \vec{v}$ im $\mathbb{R}^2$ her, mit der diese Veränderung beschrieben werden kann.	
	<p>Der Ansatz <math>\beta: \vec{x}'' = \begin{pmatrix} a_{11} &amp; a_{12} \\ a_{21} &amp; a_{22} \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}</math> führt zu einem Gleichungssystem mit 6 Unbekannten, eingesetzt werden <math>G_1', G_2'</math> und <math>G_4'</math>:</p> <p>(i) <math>0 = a_{11} + a_{12} + b_1</math>  (ii) <math>0 = a_{21} + a_{22} + b_2</math>  (iii) <math>-8 = 9a_{11} + a_{12} + b_1</math>  (iv) <math>0 = 9a_{21} + a_{22} + b_2</math>  (v) <math>0 = a_{11} + 9a_{12} + b_1</math>  (vi) <math>-8 = a_{21} + 9a_{22} + b_2</math></p> <p>Umordnung führt zu:  (i) <math>0 = a_{11} + a_{12} + b_1</math>  (iii) <math>-8 = 9a_{11} + a_{12} + b_1</math>  (v) <math>-0 = a_{11} + 9a_{12} + b_1</math></p> <p>(ii) <math>0 = a_{21} + a_{22} + b_2</math>  (iv) <math>0 = 9a_{21} + a_{22} + b_2</math>  (vi) <math>-8 = a_{21} + 9a_{22} + b_2</math></p> <p>Also <math>\beta: \vec{x}'' = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 \\ 0 &amp; -1 \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}</math></p>	10(III)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1.3.2	... bestimmt den Bildpunkt des Punktes $F'_1(1; 5)$ nach Abbildung mit $\beta$ .	
	$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p><math>\beta</math>: <math>\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 \\ 0 &amp; -1 \end{pmatrix} \vec{x}' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}</math> mit <math>\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}</math> führt zu <math>\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 \\ 0 &amp; -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}</math> und damit zu <math>x_1'' = 0</math> und <math>x_2'' = -4</math> und somit <math>F''_1(0; -4)</math>.</p>	4(I)
1.3.3	...begründet, um welche Abbildung im $\mathbb{R}^2$ es sich handelt.	
	Der Punkt $P(a; b)$ wird durch die Abbildung auf $P'(-a; -b)$ abgebildet. Es handelt sich bei der Abbildung also um eine Spiegelung am Koordinatenursprung.	3(III)
	... leitet für die Abbildung $\gamma$ die Fixpunkte und Fixgeraden her.	
	<p>Bestimmen der Fixpunkte:</p> $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ führt zum Fixpunkt } O(0; 0).$ <p>Lösen der charakteristischen Gleichung <math>(-1 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) - 0 = 0</math> führt zum Eigenwert <math>\lambda = -1</math>. Für alle Vektoren</p> $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt: } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$ <p>Somit sind alle von Null verschiedenen Vektoren der Ebene Eigenvektoren. Da <math>O(0;0)</math> einziger Fixpunkt ist, sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden.</p>	5(II)
	<b>Summe Aufgabe 1</b>	<b>45</b>



Aufgabe 2

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>2.1.1</b>	<b>... berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler gleichzeitig scheitern.</b>	
	<p>Ereignis A: Die Aufgabe wurde erfolgreich erfüllt.</p> <p>Ereignis <math>A_i</math>: Spieler i hat seine Aufgabe erfolgreich erfüllt <math>i=1,2</math>.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass beide gleichzeitig scheitern beträgt:</p> $P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,14 \cdot 0,07 = 0,0098 \approx 1\%$	<b>4(I)</b>
<b>2.1.2</b>	<b>... zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Aufgabe wiederholt werden muss, näherungsweise <math>p = 0,2</math> beträgt.</b>	
	<p>Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aufgabe wiederholt werden muss, beträgt:</p> $P(\bar{A}) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) = 1 - 0,86 \cdot 0,93 = 0,2002 \approx 20\%$	<b>3(II)</b>
<b>2.2.1</b>	<b>... berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens einmal die Aufgabe wiederholen müssen.</b>	
	<p>Es werden 10 Spielsituationen betrachtet.</p> <p>X sei die Anzahl der Spielsituationen, die wiederholt werden müssen. X ist binomialverteilt mit <math>n = 10</math> und <math>p = 0,2</math>.</p> $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8^{10} = 0,8926$	<b>4(I)</b>
<b>2.2.2</b>	<b>... beurteilt die Aussage, dass mindestens 25 Durchgänge gespielt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler mindestens einmal die Aufgabe wiederholen müssen, größer als 99% ist.</b>	
	<p>Es werden n Spielsituationen betrachtet.</p> <p><math>X_n</math> sei die Anzahl der Spielsituationen, die wiederholt werden müssen. <math>X_n</math> ist binomialverteilt mit <math>p = 0,2</math>.</p> $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,8^n > 0,99$ $\Rightarrow n > \frac{\lg(0,01)}{\lg(0,8)} \approx 20,64$ <p>Die Aussage ist falsch, da 21 Versuche bereits ausreichen.</p>	<b>6(III)</b>
<b>2.3.1</b>	<b>... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der erfolgreich durchgeführten Spiele um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht.</b>	
	<p>Es werden 100 Spielsituationen betrachtet.</p> <p>X sei die Anzahl der Spielsituationen, die erfolgreich durchgeführt werden.</p>	<b>5(I)</b>





	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<p>X ist binomialverteilt mit <math>n = 100</math> und <math>p = 0,8</math>.</p> <p><math>E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,8 = 80</math></p> <p><math>P(75 \leq X \leq 85) = P(X \leq 85) - P(X \leq 74) = 0,9196 - 0,0875 = 0,8321</math></p>	
<b>2.3.2</b>	<b>... beurteilt diese Aussage.</b>	
	<p>Es werden 100 Spielsituationen betrachtet.</p> <p>X sei die Anzahl der Spielsituationen, die wiederholt werden müssen.</p> <p>X ist binomialverteilt mit <math>n = 100</math> und <math>p = 0,2</math>.</p> <p><math>P(X \leq 20) - P(X \leq 19) = 0,5595 - 0,4602 = 0,0993 \approx 0,1</math></p> <p>Die Aussage ist wahr.</p>	<b>4(II)</b>
<b>2.4</b>	<b>... bestimmt, wie lange die Tester voraussichtlich brauchen, um 10 Spielrunden durchzuführen.</b>	
	<p>Die Zufallsvariable T gibt die Zeit an, bis eine neue Spielsituation begonnen werden kann.</p> <p><math>E(T) = 3 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,2 = 3,2 \text{ min} = 3 \text{ min } 12 \text{ sec}</math></p> <p>Damit ergibt sich für zehn Runden die voraussichtliche Spielzeit von <math>10 \cdot E(T) = 32 \text{ min}</math>.</p>	<b>5(II)</b>
<b>2.5.1</b>	<b>... berechnet, ab welcher Anzahl gescheiterter Durchgänge diese Behauptung auf einem Signifikanzniveau von 5% zurückgewiesen werden kann.</b>	
	<p><math>H_0 : p \leq 0,125</math></p> <p><math>H_1 : p &gt; 0,125</math></p> <p><math>K := \{0, \dots, g-1\}</math> sei der Annahmehereich von <math>H_0</math>.</p> <p><math>\bar{K} = \{g, \dots, 100\}</math> sei der Ablehnungsbereich von <math>H_0</math></p> <p>Stichprobenumfang <math>n = 100</math> und Irrtumswahrscheinlichkeit <math>\alpha = 0,05</math></p> <p>X sei die Anzahl derjenigen Spielsituationen, bei der beide scheitern und die damit wiederholt werden müssen.</p> <p>X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit <math>p = 0,125</math>.</p> <p>Da sehr große Werte von X gegen <math>H_0</math> sprechen, handelt es sich um einen rechtsseitigen Test.</p> <p><math>P(X \geq g) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq g-1) \geq 0,95 \Rightarrow g-1 = 18 \Rightarrow g = 19</math>.</p>	<b>7(II)</b>



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Ab 19 gescheiterten Durchgängen kann die Behauptung zurückgewiesen werden. Bemerkung: Die Lösung mit Hilfe der Sigma-Umgebung erfolgt entsprechend, führt aber eventuell – je nach Rundung – zu dem Ergebnis $g = 18$ .	
<b>2.5.2</b>	<b>... interpretiert, was ein Fehler 2. Art (<math>\beta</math>-Fehler) für diesen Sachverhalt bedeutet.</b>	
	Ein Fehler 2. Art ( $\beta$ -Fehler) tritt auf, wenn die Behauptung der beiden Spieler, dass sie höchstens 12,5% Fehler machen, beibehalten wird, was auch das Stichprobenergebnis zeigt. In Wahrheit gilt aber $p = \frac{1}{6}$ .  Wir berechnen also die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenergebnis im Annahmebereich $K = \{0, \dots, 18\}$ liegt, für $p = \frac{1}{6}$ .	<b>4(III)</b>
	<b>...weist nach, dass dieser Fehler für das obige Testverfahren näherungsweise 70% beträgt; wenn die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Scheitern tatsächlich bei <math>p = \frac{1}{6}</math> liegt.</b>	
	$F(100; \frac{1}{6}; 18) = 0,6965$ .	<b>3(III)</b>
	<b>Summe Aufgabe 2</b>	<b>45</b>



Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>3.1.1</b>	<b>... leitet aus diesen Vorgaben die Funktionsgleichung von f her.</b>	
	<p>Es gilt: <math>f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d</math>.</p> <p><math>f(0) = 0 \wedge f'(0) = 3 \wedge f'(3) = -\frac{3}{8} \wedge f(1) = 2</math></p> <p>Aus den Bedingungen ergibt sich nach Vereinfachung das folgende lineare Gleichungssystem:</p> $\begin{cases} 27a + 6b = -\frac{27}{8} \\ a + b = -1 \end{cases}$ <p>Umformung des Gleichungssystems ergibt: <math>f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 3x</math></p>	<b>8(II)</b>
<b>3.1.2</b>	<b>... bestimmt dazu rechnerisch die lokalen Hoch-, Tief- und Wendepunkte der Funktion f.</b>	
	<p><math>f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 3x</math>, <math>f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + 3</math>, <math>f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}</math>, <math>f'''(x) = \frac{3}{4}</math></p> <p>Extrempunkte (notw. Kriterium: <math>f'(x) = 0</math>)</p> <p><math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4</math></p> <p>hinr. Kriterium: <math>f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0</math></p> <p><math>(f'(2) = 0 \wedge f''(2) = -0,75 &lt; 0 \wedge f(2) = 2,5) \Rightarrow \text{Max}(2; 2,5)</math></p> <p><math>(f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 0,75 &gt; 0 \wedge f(4) = 2) \Rightarrow \text{Min}(4; 2)</math></p> <p>Wendepunkte (notw. Kriterium: <math>f''(x) = 0</math>)</p> <p><math>f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_w = 3</math></p> <p>hinr. Kriterium: <math>f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0</math></p> <p><math>(f''(3) = 0 \wedge f'''(3) = 0,75 \neq 0 \wedge f(3) = 2,25) \Rightarrow W(3; 2,25)</math></p>	<b>8(I)</b>



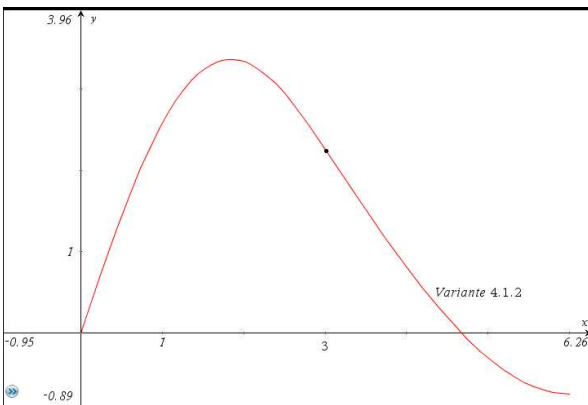
	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<p>... skizziert mit deren Hilfe den Graphen der Funktion f im Intervall [0; 6].</p> <p>Graph der Funktion f:</p>	3(I)
3.2	<p>...beweist, dass die Funktion g an der Stelle <math>x = 3</math> stetig und differenzierbar ist.</p>	
	<p>Stetigkeit:</p> <p>Wegen <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &gt; 3}} g(x) = g(3) = f(3) = 2,25</math> ist g an der Stelle 3 stetig.</p> <p>Differenzierbarkeit:</p> <p>Mit <math display="block">g'(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{9}{4} \cdot x + 3 &amp; \text{für } x \in [0; 3[ \\ -\frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - 3,75 &amp; \text{für } x \in ]3; 6] \end{cases}</math> und</p> <p><math>\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &gt; 3}} g'(x) = -0,375 = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &lt; 3}} g'(x)</math> ist g als ganzrationale Funktion auf <math>\mathbb{R}</math>, insbesondere an der Stelle <math>x_0 = 3</math> differenzierbar, somit gilt</p> <p><math display="block">g'(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{9}{4} \cdot x + 3 &amp; \text{für } x \in [0; 3] \\ -\frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - 3,75 &amp; \text{für } x \in ]3; 6] \end{cases}</math></p>	8(III)



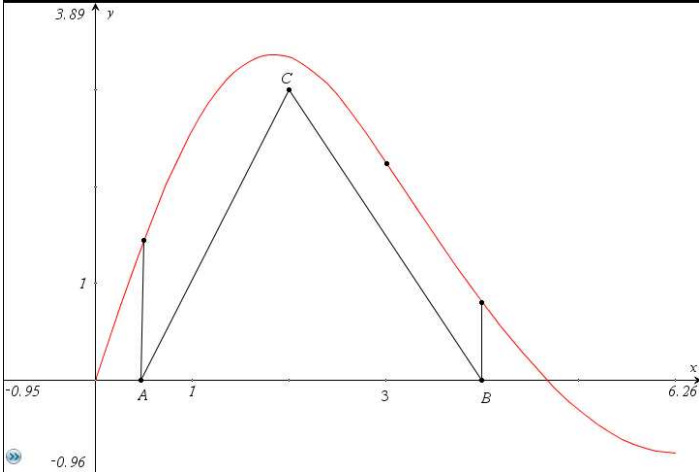
	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)												
	Der Prüfling													
3.3	<b>... gibt die Bedingungsgleichungen für die Flugbahn des Spielers mit Hilfe kubischer Splines mit den Randbedingungen <math>sp''_1(0) = 0</math> und <math>sp''_3(5) = 0</math> an.</b>													
	<p>Aus den gegebenen Punkten lassen sich die folgenden Bedingungsgleichungen für den Spline ableiten:</p> <table><tr><td><math>sp_1(0)=0</math></td><td><math>sp'_1(2) = sp'_2(2)</math></td></tr><tr><td><math>sp_1(2)=3</math></td><td><math>sp'_2(3) = sp'_3(3)</math></td></tr><tr><td><math>sp_2(2)=3</math></td><td><math>sp''_1(2) = sp''_2(2)</math></td></tr><tr><td><math>sp_2(3)=2</math></td><td><math>sp''_2(3) = sp''_3(3)</math></td></tr><tr><td><math>sp_3(3)=2</math></td><td></td></tr><tr><td><math>sp_3(5)=5</math></td><td></td></tr></table> <p>Randbedingungen:</p> $sp''_1(0) = 0$ $sp''_3(5) = 0$	$sp_1(0)=0$	$sp'_1(2) = sp'_2(2)$	$sp_1(2)=3$	$sp'_2(3) = sp'_3(3)$	$sp_2(2)=3$	$sp''_1(2) = sp''_2(2)$	$sp_2(3)=2$	$sp''_2(3) = sp''_3(3)$	$sp_3(3)=2$		$sp_3(5)=5$		<b>4(I)</b>
$sp_1(0)=0$	$sp'_1(2) = sp'_2(2)$													
$sp_1(2)=3$	$sp'_2(3) = sp'_3(3)$													
$sp_2(2)=3$	$sp''_1(2) = sp''_2(2)$													
$sp_2(3)=2$	$sp''_2(3) = sp''_3(3)$													
$sp_3(3)=2$														
$sp_3(5)=5$														
3.4.1	<b>... berechnet <math>\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b  (f(x) - sp_1(x))  dx</math> mit <math>b = 2</math> und <math>a = 0</math>.</b>													
	<p>Zur Lösung der Aufgabenstellung ist zunächst die Differenzfunktion <math>d(x)</math> aus den beiden Funktionen <math>f(x)</math> und <math>sp_1(x)</math> zu ermitteln:</p> $d(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{2}x$ $d(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0,54 \vee x = 2,46$ $\frac{1}{2-0} \cdot \left( \left  \int_0^{0,54} d(x) dx \right  + \left  \int_{0,54}^2 d(x) dx \right  \right) = \frac{1}{2} \cdot ( 0,02  +  -0,52 ) = 0,27$	<b>10(II)</b>												
3.4.2	<b>... interpretiert das Ergebnis im Kontext.</b>													
	Das Ergebnis 0,27 LE ist der mittlere Abstand der beiden Flugbahnen im Intervall $[0; 2]$	<b>4(III)</b>												
	<b>Summe Auswahlaufgabe 3</b>	<b>45</b>												
	<b>Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 3</b>	<b>135</b>												



Auswahlaufgabe 4

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>4.1</b>		
<b>4.1.1</b>	<b>... leitet aus den Vorgaben die Funktionsgleichung von f her.</b>	
	<p>Mit einer Funktion vierten Grades (<math>f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e</math>) folgen aus den Angaben die fünf Bedingungen <math>f(0)=0</math>, <math>f'(0)=3</math>, <math>f(2)=3\frac{1}{3}</math>, <math>f(3)=2,25</math> und <math>f''(3)=0</math>. Die entsprechenden Gleichungen können mit dem CA-System formal erzeugt werden. Die Lösung des Gleichungssystems ergibt <math>a = \frac{1}{12}</math>; <math>b = -\frac{1}{2}</math>; <math>c = 0</math>; <math>d = 3</math>; <math>e = 0</math> und somit die genannte Funktionsgleichung.</p>	<b>6(II)</b>
<b>4.1.2</b>	<b>... beweist, dass die Funktion g an der Stelle <math>x_0 = 3</math> stetig und differenzierbar ist.</b>	
	<p>Stetigkeit: f ist als ganzrationale Funktion stetig.</p> <p>Wegen <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &gt; 3}} g(x) = 2,25 = g(3)</math> und <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &lt; 3}} g(x) = 2,25 = f(3) = g(3)</math> ist g an der Stelle 3 stetig.</p> <p>Differenzierbarkeit:</p> <p>Mit <math>g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 &amp; \text{für } x \in [0; 3[ \\ \frac{1}{6}x^2 - x &amp; \text{für } x \in ]3; 6] \end{cases}</math> und <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &gt; 3}} g'(x) = -\frac{3}{2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x &lt; 3}} g'(x)</math> ist g als ganzrationale Funktion auf <math>\mathbb{R}</math>, insbesondere an der Stelle <math>x_0=3</math> differenzierbar, somit gilt</p> <p><math>g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 &amp; \text{für } x \in [0; 3] \\ \frac{1}{6}x^2 - x &amp; \text{für } x \in ]3; 6] \end{cases}</math></p>	<b>7(III)</b>
	<b>... zeichnet den Graphen der Funktion g im Intervall <math>[0; 6]</math> in ein Koordinatensystem.</b>	
		<b>5(I)</b>



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
4.1.3	... zeichnet das Hindernis.	
		3(I)
4.1.4	... bestimmt den Inhalt dieser Fläche, wenn die Flugbahn durch den Graphen von g gegeben ist.	
	<p>Die beschriebene Fläche ergibt sich aus den beiden Teilflächen abzüglich der Dreiecksfläche:</p> $A = \int_{0.5}^3 g(x) dx + \int_3^4 g(x) dx - \frac{(4 - 0.5) \cdot 3}{2} \approx 7,05729 + 1,51389 - 5,25 = 3,32118 \text{ (FE)}$	5(II)
4.2.1	... bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Kollisionspunktes.	
	<p><math>k = 0,3</math>:</p> <p>Geradengleichung aufstellen: <math>d_{li}(x) = 2 \cdot (x - 0,5)</math>, <math>0,5 \leq x \leq 2</math></p> <p>Durch Gleichsetzen <math>d_{li}(x) = s_{0,3}(x)</math> erhält man, dass die entsprechende Gerade <math>d_{li}</math> von der Flugbahn <math>s_{0,3}</math> im Punkt <math>S(1,825; 2,649)</math> geschnitten wird.</p>	6(I)
4.2.2	... berechnet im Intervall $[0; 3]$ die maximale vertikale Abweichung zwischen der idealen Flugbahn (Graph von f) und der durch den Graphen von $s_{0,2}$ beschriebenen Flugbahn.	
	<p>Vertikale Abweichung: Definiere <math>d(x) = s_{0,2}(x) - f(x)</math>.</p> <p>Die Ableitung <math>d'(x)</math> hat Nullstellen bei <math>x_1 = 0,563</math>, <math>x_2 = 2,312</math> und <math>x_3 = 3,42</math>.</p> <p>Es gilt <math>x_3 \notin [0; 3]</math>, kommt somit nicht in Frage. Eine Überprüfung der Funktionswerte ergibt: <math>d(x_1) = 0,517</math> und <math>d(x_2) = -0,288</math>. Das hinreichende Kriterium mit der zweiten Ableitung ergibt <math>d''(0,56) &lt; 0</math>. Es liegt also ein relatives Maximum bei <math>x_1</math> vor. (Je nach Definition von <math>d</math> ist auch ein Minimum denkbar.)</p> <p>Ferner sind <math>x_4 = 0</math> und <math>x_5 = 3</math> zu berücksichtigen, da ein Randextremum existieren könnte. Wegen <math>d(0) = 0</math> und <math>d(3) = -0,142</math> liegt an der Stelle <math>x_1</math> die absolute maximale Abweichung mit <math>0,517</math> LE vor.</p>	6(II)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
4.3	...beweist, dass die Tangente mit dem höchsten y-Achsenabschnitt die Wendetangente ist.	
	$s_{0,3}(x) = (0,128 \cdot x^3 - 1,664 \cdot x^2 + 5,12 \cdot x) e^{-0,3 \cdot x}$ Sei t die Tangente an den Graphen von $s_{0,3}$ im Punkt $P(u; s_{0,3}(u))$ mit $u \in [2; 5]$ . Es gilt: $s_{0,3}(u) = t(u) = s'_{0,3}(u) \cdot u + b(u) \Rightarrow b(u) = \frac{1}{625} (8 \cdot u^2 (3 \cdot u^2 - 59 \cdot u + 250)) \cdot e^{-\frac{3}{10}u}$ . $b'(u) = 0 \Rightarrow u = 0 \vee u = 2,87116 \vee u = 9,28156 \vee u = 20,8473$ $u = 2,87116 \in [2; 5]$ $(b'(2,87116) = 0 \wedge b''(2,87116) = -1,61 < 0) \Rightarrow u = 2,87116$ lok. Max. $(H(2,87116; 4,69)$ ist lokaler Hochpunkt in $[2; 5]$ und $b(2) = 4,04628$ ; $b(5) = 2,14205$ ) $\Rightarrow$ An der Stelle $u = 2,87116$ liegt ein absoluter Hochpunkt von $b$ in $[2; 5]$ vor. Bleibt zu prüfen, ob 2,87116 Wendestelle ist. $(s''_{0,3}(2,87116) = 0$ und $s'''_{0,3}(2,87116) = 0,560989 \neq 0) \Rightarrow x = 2,87116$ ist Wendestelle. Die gesuchte Tangente ist also die Wendetangente.	7(III)
	<b>Summe Auswahl Aufgabe 4</b>	<b>45</b>
	<b>Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahl Aufgabe 4</b>	<b>135</b>

**b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4
2	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4
3	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4
4	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3
	<b>Summe Darstellungsleistung</b>	<b>15</b>

	<b>Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)</b>	<b>150</b>
--	--	------------





## 9 Bewertungsbogen zur Abiturprüfung im Fach Mathematik-Informatik

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kurs: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 1

	Anforderungen Der Prüfling...	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1.1.1	... überprüft das Ergebnis.	4(II)			
	... bestimmt anschließend eine Geradengleichung, die das CAD-System nach Eingabe der Firstpunkte $F_1$ und $F_2$ ermitteln könnte.	3(I)			
1.1.2	... ermittelt die Ebenengleichung der durch die Punkte $T_3, T_4$ und $F_1$ gegebenen Dachebene in Koordinatenform.	6(I)			
1.2	... untersucht, welche maximale Abmessung in $x_2$ -Richtung die Überdachung haben darf, damit bei diesem Sonnenstand kein Schatten auf die Terrasse fällt.	10(II)			
1.3.1	... leitet die affine Abbildung $\beta: \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{v}$ im $\mathbb{R}^2$ her, mit der diese Veränderung beschrieben werden kann.	10(III)			
1.3.2	... bestimmt den Bildpunkt des Punktes $F_1'(1; 5)$ nach Abbildung mit $\beta$ .	4(I)			
1.3.3	...begründet, um welche Abbildung im $\mathbb{R}^2$ es sich handelt.	3(III)			
	... leitet für die Abbildung $\gamma$ die Fixpunkte und Fixgeraden her.	5(II)			
Summe Aufgabe 1		45			



Aufgabe 2

	Anforderungen  Der Prüfling...	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
2.1.1	... berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler gleichzeitig scheitern.	4(I)			
2.1.2	... zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Aufgabe wiederholt werden muss, näherungsweise $p = 0,2$ beträgt.	3(II)			
2.2.1	... berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens einmal die Aufgabe wiederholen müssen.	4(I)			
2.2.2	... beurteilt die Aussage, dass mindestens 25 Durchgänge gespielt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler mindestens einmal die Aufgabe wiederholen müssen, größer als 99% ist.	6(III)			
2.3.1	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der erfolgreich durchgeführten Spiele um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht.	5(I)			
2.3.2	... beurteilt diese Aussage.	4(II)			
2.4	... bestimmt, wie lange die Tester voraussichtlich brauchen, um 10 Spielrunden durchzuführen.	5(II)			
2.5.1	... berechnet, ab welcher Anzahl gescheiterter Durchgänge diese Behauptung auf einem Signifikanzniveau von 5% zurückgewiesen werden kann.	7(II)			
2.5.2	... interpretiert, was ein Fehler 2. Art ( $\beta$ -Fehler) für diesen Sachverhalt bedeutet.	4(III)			
	...weist nach, dass dieser Fehler für das obige Testverfahren näherungsweise 70% beträgt; wenn die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Scheitern tatsächlich bei $p = \frac{1}{6}$ liegt.	3(III)			
Summe Aufgabe 2		45			



Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen  Der Prüfling...	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
3.1.1	... leitet aus diesen Vorgaben die Funktionsgleichung von f her.	8(II)			
3.1.2	... bestimmt dazu rechnerisch die lokalen Hoch-, Tief- und Wendepunkte der Funktion f.	8(I)			
	... skizziert mit deren Hilfe den Graphen der Funktion f im Intervall [0; 6].	3(I)			
3.2	...beweist, dass die Funktion g an der Stelle x = 3 stetig und differenzierbar ist.	8(III)			
3.3	... gibt die Bedingungsgleichungen für die Flugbahn des Spielers mit Hilfe kubischer Splines mit den Randbedingungen $sp''_1(0) = 0$ und $sp''_3(5) = 0$ an.	4(I)			
3.4.1	... berechnet $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b  (f(x) - sp_1(x))  dx$ mit b = 2 und a = 0.	10(II)			
3.4.2	... interpretiert das Ergebnis im Kontext.	4(III)			
Summe Auswahlaufgabe 3		45			

Summe Aufgabe 1 – 3

135			
-----	--	--	--



Auswahlaufgabe 4

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sub>1</sub>	EK	ZK	DK
4.1.1	... leitet aus den Vorgaben die Funktionsgleichung von f her.	6(II)			
4.1.2	... beweist, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = 3$ stetig und differenzierbar ist.	7(III)			
	... zeichnet den Graphen der Funktion g im Intervall $[0; 6]$ in ein Koordinatensystem.	5(I)			
4.1.3	... zeichnet das Hindernis.	3(I)			
4.1.4	... bestimmt den Inhalt dieser Fläche, wenn die Flugbahn durch den Graphen von g gegeben ist.	5(II)			
4.2.1	... bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Kollisionspunktes.	6(I)			
4.2.2	... berechnet im Intervall $[0; 3]$ die maximale vertikale Abweichung zwischen der idealen Flugbahn (Graph von f) und der durch den Graphen von $s_{0,2}$ beschriebenen Flugbahn.	6(II)			
4.3	...beweist, dass die Tangente mit dem höchsten y-Achsenabschnitt die Wendetangente ist.	7(III)			
Summe Auswahlaufgabe 4		45			

Summe Aufgabe 1 ,2 ,4

135			
-----	--	--	--



b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1)</sup>	EK	ZK	DK
	Der Prüfling...				
1.	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4			
2.	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4			
3.	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4			
4.	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3			
<b>Summe Darstellungsleistung</b>		<b>15</b>			

	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
<b>Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)</b>	<b>150</b>			
<b>Aus der Punktesumme resultierende Note</b>				
<b>Note</b> (ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gem. § 8 (4), APO-BK, Anlage D)				
<b>Paraphe</b>				

Die Klausur wird abschließend mit der Note

\_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ Notenpunkte)

bewertet.

\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (EK)

\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (ZK)

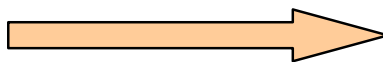
\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (DK)



## Notenfindung

% - Anteil erbrachter Leistung		Noten- Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	< 95%	14	sehr gut	135	142
85%	< 90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	< 85%	12	gut plus	120	127
75%	< 80%	11	gut	113	119
70%	< 75%	10	gut minus	105	112
65%	< 70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	< 65%	8	befriedigend	90	97
55%	< 60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	< 55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	< 50%	5	ausreichend	68	74
39%	< 45%	4	ausreichend minus	59	67
33%	< 39%	3	mangelhaft plus	50	58
27%	< 33%	2	mangelhaft	41	49
20%	< 27%	1	mangelhaft minus	30	40
0%	< 20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



**150**