



BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Zentrale Abiturprüfung 2010

Weiterer Leistungskurs Mathematik

Fachbereich Informatik

Unterlagen für die Lehrkraft



1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Zahlentheorie u. Lineare Algebra: Abbildungen u. Verschlüsselungen
Aufgabe 2	Stochastik: Untersuchung von Defekten bei LCD-Bildschirmen
Auswahlaufgabe 3 (ohne CAS)	Analysis: Pfadanimation in der Computergrafik; Untersuchung des Pfads, des Objekts und der Animation
Auswahlaufgabe 4 (mit CAS)	Analysis: Pfadanimation in der Computergrafik; Untersuchung des Pfads, des Objekts und der Animation

2 Aufgabenstellung (vgl. Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler)

3 Materialgrundlage

entfällt

4 Bezüge zu den Abiturvorgaben 2010

Aufgabe 1 Lineare Algebra und Zahlentheorie

- Grundlagen der Matrizenrechnung
Elementare Matrizenoperationen
Abbildungsmatrizen und affine Abbildungen
- Grundlagen der Modularen Arithmetik (Modul-Begriff, Kongruenzen, Restklassen mod m inkl. Eigenschaften und Operationen, \mathbb{Z}_m als Gruppe, $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ als Ring bzw. Körper, Eulersche φ -Funktion))
- Anwendungen der Modularen Arithmetik (Prüfziffernverfahren)
- Euklidischer und Erweiterter Euklidischer Algorithmus
- Anwendungen der Euklidischen Algorithmen (Bestimmung des ggT, Inversen-Bestimmung in primen Restklassengruppen)
- Satz von Euler-Fermat $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
- Anwendungen des Satzes von Euler-Fermat (Reduktion großer Exponenten modulo n)

Aufgabe 2 Stochastik

- Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit nach Laplace, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln, Zählstrategien (Allgemeines Zählprinzip, Binomialkoeffizient, n -Fakultät)
Zufallsgrößen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vier-Felder-Tafeln, Baumdiagramme
Satz von Bayes



- Binomialverteilung
Kenngrößen der Binomialverteilung,
- Hypothesentest

Aufgabe 3 und 4 Analysis

- Funktionsklassen ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und deren Verknüpfungen
Funktionseigenschaften: Kurvenscharen und Parameter in Funktionsvorschriften, Abschnittsweise definierte Funktionen, Differenzierbarkeit und Stetigkeit, Tangente und Normale, Ableitungsregeln, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, Extremwertprobleme
Integration: Umgang mit Integralfunktionen Bestimmung von Stammfunktionen, Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals

5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2010 sind zugelassen:
 - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
 - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung, s. Anhang dieses Dokumentes,
 - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2010 sind **nicht** zugelassen:
 - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
 - Computeralgebrasysteme (außer für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6)),
 - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren
- In der Abiturprüfung 2010 sind nur für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6) Computeralgebrasysteme als weiteres erforderliches Hilfsmittel zugelassen.

Das eingesetzte CAS sollte mindestens folgende Funktionen umfassen

- Wertetabellen erstellen
- algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- algebraische Gleichungen lösen
- lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnung durchführen
- Funktionen algebraisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darstellen



6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

Für die Abiturprüfung 2010 erhält die Schule insgesamt vier Aufgaben:

- insgesamt zwei Aufgaben (Aufgabe 1 und 2) aus den Themengebieten Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Stochastik, Zahlentheorie,
- zwei Aufgaben zur Analysis.

Die beiden Aufgaben aus den Themengebieten Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Stochastik, Zahlentheorie sind verbindlich zu bearbeiten.

Von den beiden Aufgaben zur Analysis wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus. Diese Aufgaben unterscheiden sich durch den Einsatz der zugelassenen Hilfsmittel.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Aufgaben.

Nach einer Auswahlzeit von drei Zeitstunden teilt die Fachlehrerin / der Fachlehrer der Schulleitung schriftlich die Entscheidung mit. Diese Entscheidung wird zu den Prüfungsakten genommen. Für die Prüflinge besteht keine Aufgabenauswahl. Sie erhalten keine zusätzliche Auswahlzeit.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe **ohne** CAS-Einsatz entscheiden, so können die drei Aufgaben in der festgelegten Bearbeitungszeit insgesamt in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe **mit** CAS-Einsatz entscheiden, sind folgende Hinweise zu beachten:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit die drei zu bearbeitenden Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler geben individuell nach Bearbeitung die beiden Lösungen der Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und Stochastik und ggf. Zahlentheorie ab. Im Gegenzug wird ihnen das Computeralgebrasystem zur Verfügung gestellt. Ein weiteres Bearbeiten der ersten zwei Aufgaben ist danach nicht mehr möglich. Die Abgabezeit für die Aufgaben 1 und 2 wird von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer bzw. der aufsichtführenden Lehrkraft protokolliert.

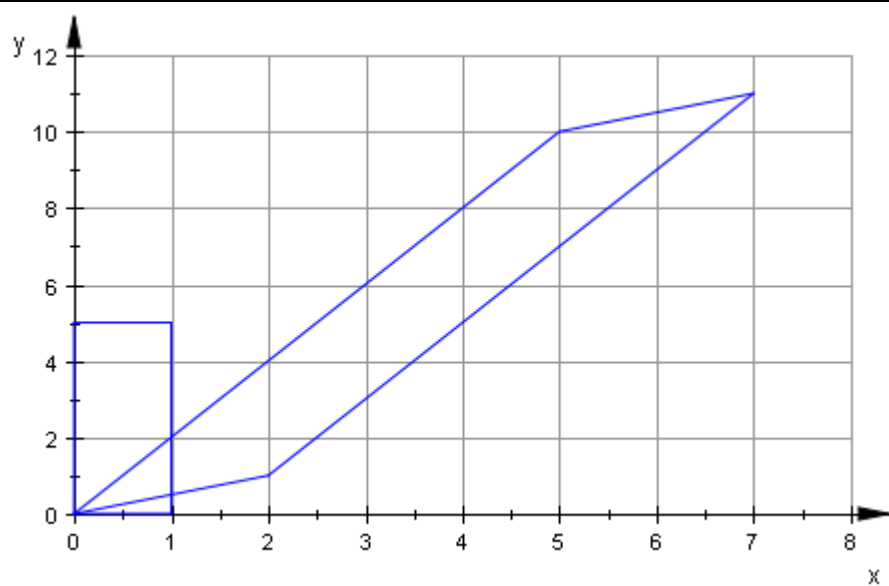
- Für eine hinreichende Anzahl von Ersatzsystemen (PC's bzw. Handhelds) ist zu sorgen.
- Alle Systeme sind vor der Prüfung in den Urzustand zu versetzen. Zusätzliche Tools bzw. ergänzende Programme sind auf den Systemen nicht zulässig. Die Schule stellt sicher, dass keine Verbindung der Systeme untereinander sowie keine Verbindung der Systeme zum Internet vorhanden sind.
- Der Lösungsweg ist von den Schülerinnen und Schülern in der Reinschrift textlich so zu dokumentieren, dass der Gedankengang der Problemlösung vollständig nachvollziehbar ist. Die Dokumentation ist integraler Bestandteil der Problemlösung und geht in die Bewertung der Prüfungsleistung ein.
- Wird der Computer zum Editieren von Aufgabenlösungen benutzt, muss der Prüfling zum Abschluss einen Computerausdruck seines Lösungstextes durch Unterschrift autorisieren. Die Erstellung des Computerausdrucks ist von der Schule innerhalb der Gesamtbearbeitungszeit so zu organisieren, dass beim Abgeben der Prüfungsarbeit der unterschriebene Ausdruck vorliegt. Nur der autorisierte Ausdruck ist Bestandteil der Prüfungsarbeit; die elektronische Version (Datei) kann nicht zur Korrektur oder Bewertung herangezogen werden.
- Die verwendete Technologie muss in den Prüfungsakten von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer mit Angabe des verwendeten Computeralgebrasystems bzw. Handheld-Typs mit der Version bzw. Versionsnummer vermerkt werden.

7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Teilleistungen – Kriterien

a) inhaltliche Leistung

Aufgabe 1

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.	
1.1		
1.1.1	...bestimmt die Bildpunkte der Abbildung.	
	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(0;0), \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(2;1)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow R'(5;10), \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow T'(7;11)$	4(I)
1.1.2	...stellt Urbild und Bild geeignet in einem Koordinatensystem dar.	
		3(I)
1.2		
1.2.1	... bestimmt den verschlüsselten Text als Zahlenfolge.	
	$\vec{v}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_{IT} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix}, \vec{v}_{UR} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ und } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M \cdot \vec{v}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M \cdot \vec{v}_{IT} = \begin{pmatrix} 35 \\ 46 \end{pmatrix}, M \cdot \vec{v}_{UR} = \begin{pmatrix} 57 \\ 54 \end{pmatrix}$	3(I)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Verschlüsselter Text als Zahlenfolge: 1 2 35 46 57 54	
1.2.2	... stellt die Entschlüsselungsmatrix auf.	
	Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix (Entschlüsselungsmatrix) ist freigestellt: $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	3(II)
1.2.3	... zeigt, dass die Menge der 2x2 Matrizen $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $a_{12}, a_{21}, a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ eine kommutative Halbgruppe hinsichtlich der Matrizenmultiplikation bildet.	
	Abgeschlossenheit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} \in M$ Neutrales Element : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Kommutativität: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{21} \cdot a_{12} & b_{12} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{12} \\ b_{11} \cdot a_{21} + b_{21} \cdot a_{22} & b_{12} \cdot a_{21} + b_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	8(III)
1.3	... gibt den entschlüsselten Text sowie die verwendeten Vorschriften $y \equiv x + z \pmod{26}$ zur Verschlüsselung und Entschlüsselung an.	
	Der Buchstabe E ist in der deutschen Sprache der häufigste Buchstabe. Der Buchstabe J ist im verschlüsselten Text ein Kandidat, dann wäre $z = 5$ J N S G J B J N X I J W S N H M Y X Y W J S L N X Y N X Y S N H M Y X E I N B E W E I S D E R N I C H T S T R E N G I S T I S T N I C H T S Vorschrift zur Verschlüsselung: $y \equiv x + 5 \pmod{26}$ Vorschrift zur Entschlüsselung: $y \equiv x - 5 \pmod{26}$	4(I)
1.4	... erläutert den Sonderfall.	
	Bei ROT13 entspricht die Verschlüsselungsvorschrift $y \equiv x + 13 \pmod{26}$ der Entschlüsselungsvorschrift $y \equiv x - 13 \pmod{26}$, da $-13 \equiv 13 \pmod{26}$.	2(II)
1.5	...bestimmt mit Hilfe des Erweiterten Euklidischen Algorithmus die Inverse bezüglich der Multiplikation zu 9 in \mathbb{Z}_{11} .	



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	$11 = 1 \cdot 9 + 2$ $9 = 4 \cdot 2 + 1 \Rightarrow$ $1 = 9 - 4 \cdot 2$ $1 = 9 - 4 \cdot (11 - 1 \cdot 9)$ $1 = 9 - 4 \cdot 11 + 4 \cdot 9$ $1 = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11 \Rightarrow 1 \bmod 11 \equiv 5 \cdot 9 \bmod 11$ Die Inverse zu 9 lautet 5.	4(II)
1.6		
1.6.1	...bestimmt ... die Prüfziffer.	
	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 \bmod 11 \equiv$ $222 \bmod 11 \equiv 2 \bmod 11 \Rightarrow p = 2$ Die ISBN-Nummer lautet demnach 3-507-83934-2	3(II)
1.6.2	... bestimmt für das Buch mit der an einer Stelle falsch erfassten ISBN-Nummer 3-507-88974-3 eine korrekte ISBN-Nummer.	
	Berechnet man mit den ersten 9 Ziffern eine Prüfziffer, so ergibt sich $p_1 = 9$. Die Differenz zur korrekten Prüfziffer $p = 3$ beträgt $p_1 - p = 6$. Man sucht also in der Summe zur Berechnung der Prüfziffer eine Stelle i mit zugehöriger Ziffer z_i , so dass $i \cdot z_i \bmod 11 \equiv 6$ ist und vermindert in diesem Fall die Ziffer entsprechend. Eine mögliche Lösung ist : 3-507-87974-3	3(II)
1.7.1	...zeigt mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass der größte gemeinsame Teiler (ggT) von 632 und 53 gleich 1 ist.	
	$632 = 11 \cdot 53 + 49$ $53 = 1 \cdot 49 + 4$ $49 = 12 \cdot 4 + 1$ $4 = 1 \cdot 4 + 0$ somit gilt $\text{ggT}(632, 53) = 1$	3(II)
1.7.2	... zeigt mit Hilfe der Eulerschen φ-Funktion, dass gilt $632^{107} \bmod 53 \equiv 42$	
	53 ist Primzahl, also gilt $\varphi(53) = 53 - 1 = 52$ Wegen $\text{ggT}(632, 53) = 1$ gilt: $632^{52} \equiv 1 \bmod 53$ und somit $632^{53} \equiv 632 \bmod 53$ $632^{107} = 632^{53} \cdot 632^{53} \cdot 632^1 \equiv 632 \cdot 632 \cdot 632 \bmod 53 \equiv 49^3 \bmod 53 \equiv 42 \bmod 53$	5(III)
	Summe Auswahlaufgabe 1	45



Aufgabe 2

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)																
	Der Prüfling																	
	Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.																	
2.1.1	... beschreibt den Sachverhalt mit Hilfe einer Vierfeldertafel.																	
	<p>A := Fehler vom Typ 1 liegt vor, \bar{A} := Fehler vom Typ 1 liegt nicht vor, B := Fehler vom Typ 2 liegt vor, \bar{B} := Fehler vom Typ 2 liegt nicht vor.</p> <p>Anschließend vervollständigt er die entsprechende Vierfeldertafel.</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>$0,65 \cdot 12 = 7,8$</td><td>$15,8 - 7,8 = 8$</td><td>$100 - 84,2 = 15,8$</td></tr><tr><td>\bar{B}</td><td>$12 - 7,8 = 4,2$</td><td>80</td><td>$80 + 4,2 = 84,2$</td></tr><tr><td></td><td>12</td><td>$80 + 8 = 88$</td><td>100</td></tr></table>		A	\bar{A}		B	$0,65 \cdot 12 = 7,8$	$15,8 - 7,8 = 8$	$100 - 84,2 = 15,8$	\bar{B}	$12 - 7,8 = 4,2$	80	$80 + 4,2 = 84,2$		12	$80 + 8 = 88$	100	8 (I)
	A	\bar{A}																
B	$0,65 \cdot 12 = 7,8$	$15,8 - 7,8 = 8$	$100 - 84,2 = 15,8$															
\bar{B}	$12 - 7,8 = 4,2$	80	$80 + 4,2 = 84,2$															
	12	$80 + 8 = 88$	100															
2.1.2	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bildschirm keinen Fehler vom Typ 2 hat.																	
	$P(\bar{B}) = 84,2\%$	2 (I)																
2.1.3	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bildschirm, der einen Fehler vom Typ 2 hat, nicht zusätzlich einen Fehler vom Typ 1 hat.																	
	$P(\bar{A} B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{8}{15,8} = 0,5063 = 50,63\%$	4 (II)																
2.2																		
2.2.1	... gibt die Formel für die Verteilung der Zufallsgröße an.																	
	$B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	2 (I)																
	... erklärt die Bedeutung der einzelnen Bestandteile.																	
	<p>$B(n;p;k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Zügen genau k Erfolge zu erzielen. Hier: $n = 100$, $p = 0,2$ $\binom{n}{k}$ ist Anzahl der Möglichkeiten die k Erfolge auf n Postitionen zu verteilen</p>	3 (II)																

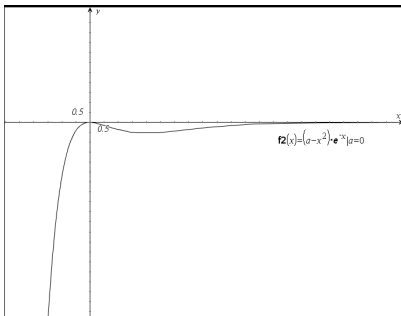


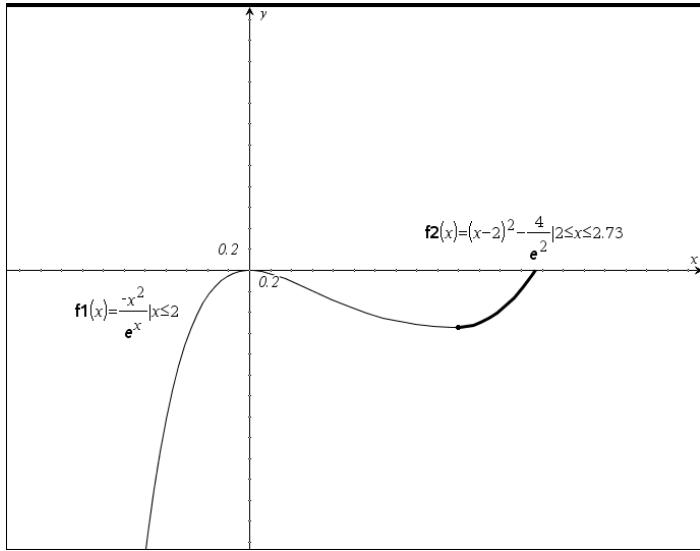
	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)								
	Der Prüfling									
	$p^k(1-p)^{n-k}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit von k Erfolgen und (n - k) Misserfolgen an fester Position.									
2.2.2	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit P(A)									
	$P(A) = P(x \leq 21) = F(100;0,2;21) = 0,654$	2 (I)								
	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit P(B)									
	$P(B) = P(x \geq 16) = 1 - F(100;0,03;15) = 1 - 0,1285 = 0,8715$	2 (II)								
2.3	...bestimmt mit Hilfe eines Hypothesentests, wie viele dieser 100 Bildschirme maximal fehlerhaft sein dürfen.									
	<p>p ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerhaften Bildschirms.</p> <p>$H_1 : p < 0,12$ $H_0 : p \geq 0,12$</p> <p>Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest, bei dem die Zufallsvariable X die Anzahl der fehlerhaften Bildschirme beschreibt und mit n = 100 und p = 0,12 binomialverteilt ist.</p> <p>Das Signifikanzniveau ist mit $\alpha = 0,05$ vorgegeben.</p> <p>Teste H_0:</p> <p>$\mu = 100 \cdot 0,12 = 10$ $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,12 \cdot 0,88} = 3,25$</p> <p>Verwerfungsbereich H_0 (= Annahmehereich von H_1):</p> <p>$\mu - 1,64 \cdot 3,25 = 4,67 \Rightarrow H_0 = \{0;...;4\}$</p> <p>Entscheidungsregel: Wenn maximal 4 defekte Bildschirme vorliegen, ist die Behauptung der Firma, die Anzahl der defekten liege unter 12% akzeptiert.</p>	9 (II)								
2.4	... zeigt in Abhängigkeit von p, welcher Techniker am kostengünstigsten arbeitet.									
	<table><tr><td>Bauteil B_i</td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td></tr><tr><td>Defektwahrscheinlichkeit</td><td>$\frac{1-p}{2}$</td><td>$\frac{1-p}{2}$</td><td>p</td></tr></table> <p>Um zu bestimmen, welcher Techniker am kostengünstigsten arbeitet, werden für die Prüfkosten Zufallsvariablen eingeführt und deren Erwartungswerte berechnet.</p> <p>Prüfkosten (in €) bei Techniker A: X Prüfkosten (in €) bei Techniker B: Y Prüfkosten (in €) bei Techniker C: Z</p>	Bauteil B_i	B_1	B_2	B_3	Defektwahrscheinlichkeit	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	p	13 (III)
Bauteil B_i	B_1	B_2	B_3							
Defektwahrscheinlichkeit	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	p							



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	$E(X) = 10 \cdot \frac{1-p}{2} + 20 \cdot \left(1 - \frac{1-p}{2}\right) = 15 + 5p$ $E(Y) = 20 \cdot p + 30(1-p) = 30 - 10p$ $E(Z) = 10 \cdot \frac{1-p}{2} + 30 \cdot \left(1 - \frac{1-p}{2}\right) = 20 + 10p$ <p>Für alle $p \in [0;1]$ arbeitet A kostengünstiger als C. Für alle $p \in [0;1[$ arbeitet A auch kostengünstiger als B. Für $p = 1$ arbeiten A und B gleich günstig.</p>	
	Summe Aufgabe 2	45

Auswahlaufgabe 3 (ohne CAS)

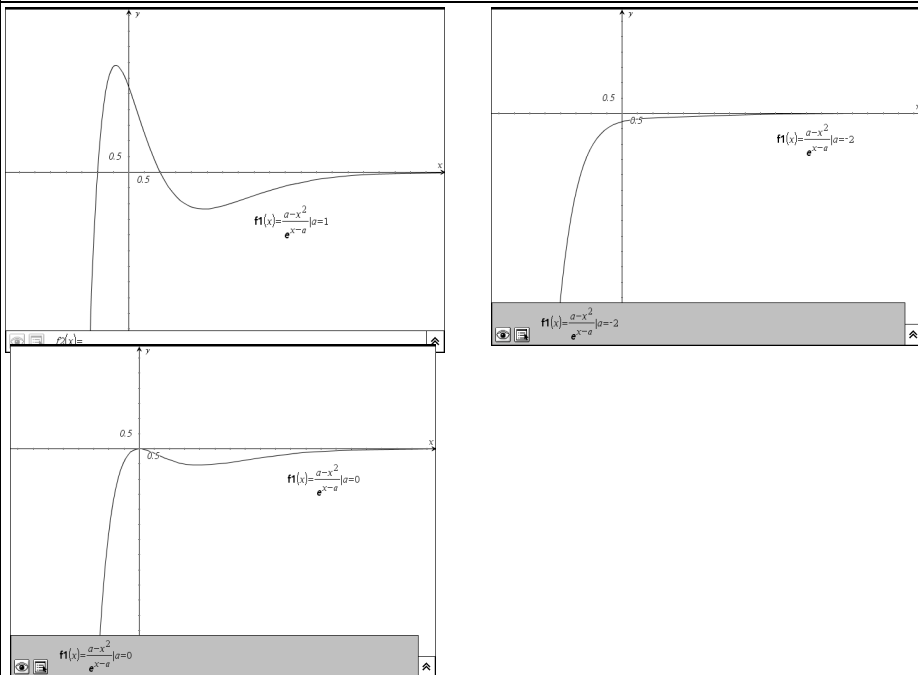
	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.	
3.1		
3.1.1	... untersucht die Funktionenschar f_a auf Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter a.	
	$f_a(x) = \frac{a - x^2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$ <p>d.h. für $a > 0$ zwei NST für $a = 0$ eine NST für $a < 0$ keine NST</p>	4(II)
3.1.2	...skizziert den Graphen von f_0.	
	<p>eine doppelte Nullstelle bei $0 \rightarrow W = \mathbb{R}^+$ Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$</p> 	6(I)
3.2	...bestimmt die Anzahl der Extremstellen der Schar f_a sowie deren x-Koordinaten in Abhängigkeit von a.	
	$f'_a(x) = \frac{-2x \cdot e^x - (a - x^2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = (x^2 - 2x - a) \cdot e^{-x}$ $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{a+1} + 1 \vee x_2 = -\sqrt{a+1} + 1$ <p>d.h. für $a < -1 \Rightarrow$ keine Extremstellen für $a = -1 \Rightarrow$ eine Extremstelle bei $x=1$ für $a > -1 \Rightarrow$ zwei Extremstellen bei x_1 und x_2</p>	7(II)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ₁
	Der Prüfling	
3.3.1	...skizziert den gesamten Pfad.	
		3(I)
3.3.2	...leitet die Gleichung der Parabel p her.	
	<p>Gleichung der Parabel: $p(x) = x^2 + b \cdot x + c$</p> <p>Zu lösen ist ein Gleichungssystem mit den Bedingungen:</p> $p(2) = \frac{-4}{e^2} \wedge p'(2) = 0, \text{ d.h.}$ $\begin{cases} 2^2 + 2b + c = \frac{-4}{e^2} \\ 2 \cdot 2 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -4 \wedge c = \frac{-4}{e^2} + 4 \Rightarrow p(x) = x^2 - 4x - \frac{4}{e^2} + 4$	6(III)
	...bestimmt den Definitionsbereich der Parabel	
	<p>Nullstellen: $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{e^2} - 4} \Leftrightarrow x = 2 \pm \frac{2}{e} \Leftrightarrow x = 1,26 \vee x = 2,73$</p> <p>$\Rightarrow \text{ID}_p = [2; 2,73]$</p>	3(I)



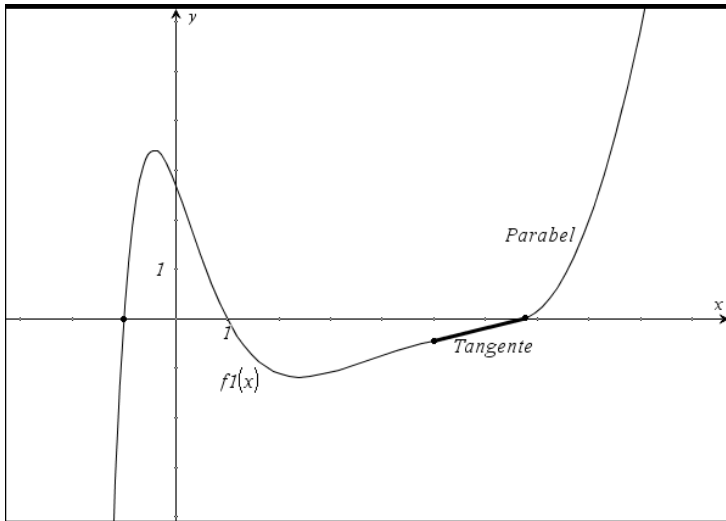
	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
3.4		
3.4.1	... leitet mit Hilfe der Schnittpunkte von o_b und u_b Breite und Höhe des Objektes her.	
	<p>Schnittpunkte von o_b und u_b:</p> $o_b(x) = u_b(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2b \cdot x - b^2 + b = x^2 - 2(b-1) \cdot x + b^2 - b$ $\Leftrightarrow 2x^2 - (4b-2) \cdot x + 2b^2 - 2b = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - (2b-1) \cdot x + b^2 - b = 0$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2b-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2b-1}{2}\right)^2 - b^2 + b}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2b-1}{2} \pm \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x_1 = b-1 \vee x_2 = b$ $o_b(b-1) = -(b-1)^2 + 2b \cdot (b-1) - b^2 + b = b-1 \Rightarrow A(b-1; b-1)$ $o_b(b) = -b^2 + 2b^2 - b^2 + b = b \Rightarrow B(b; b)$ <p>Breite und Höhe des Objekts betragen damit jeweils 1E.</p>	5(III)
3.4.2	...berechnet den Flächeninhalt des Objekts in Abhängigkeit von b.	
	<p>Die Integrationsgrenzen können aus 3.4.1 übernommen werden:</p> $\Rightarrow \int_{b-1}^b (o_b(x) - u_b(x)) dx = \int_{b-1}^b (-2x^2 + (4b-2) \cdot x - 2b \cdot (b-1)) dx$ $= \left[-\frac{2}{3} x^3 + (2b-1) \cdot x^2 - 2b \cdot (b-1) \cdot x \right]_{b-1}^b =$ $-\frac{2}{3} b^3 + (2b-1) \cdot b^2 - 2b \cdot (b-1) \cdot b - \left(-\frac{2}{3} (b-1)^3 + (2b-1) \cdot (b-1)^2 - 2b \cdot (b-1) \cdot (b-1) \right)$ $= \dots = \frac{1}{3}$	9(II)
3.4.3	...begründet eine Aussage zur Abhängigkeit von Form und Größe des Objektes in Abhängigkeit von b.	
	<p>Der Flächeninhalt beträgt unabhängig von b immer $\frac{1}{3}$ FE.</p> <p>Breite und Höhe des Objektes sind unabhängig von b immer 1; da es sich um Parabeln handelt, ist das Objekt von der Form her invariabel.</p>	2(III)
	Summe Auswahlaufgabe 3	45
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 3	135

Auswahlaufgabe 4 (mit CAS)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.	
4.1		
4.1.1.	...skizziert je einen Graphen pro Graphentyp.	
		3(I)



Anforderungen					maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
Der Prüfling					
4.1.2	...vergleicht die wesentlichen Merkmale/Eigenschaften der jeweiligen Gruppe				
	Graphentyp	A	B	C	5(III)
	z.B. a =	1	-2	0	
	Nullstellen	2	Keine $\rightarrow W= \mathbb{R}^+$	eine doppelte	
	Extremstellen	2	keine	2	
	Wendepunkte	2	keiner	2	
	Besonderheiten:		streng monoton steigend in ID		
	Grenzwerte	$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$			
	(Hinweis: Es ist auch denkbar, dass Typ A und C von den SchülerInnen zu einer Gruppe zusammengefasst werden (eine doppelte Nullstelle entspricht zwei Nullstellen))				
4.2					
4.2.1	...bestimmt die Extremstellen der Schar f_a .				
	$f'_a(x) = (x^2 - a) \cdot e^{-x+a} - 2x \cdot e^{-x+a}$ $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{a+1} + 1 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{a+1} + 1$ d.h. für $a < -1 \Rightarrow$ keine Extremstellen . für $a > -1 \Rightarrow$ existieren zwei Extrempunkte bei x_1 und x_2 .				4(II)
	4.2.2	...leitet die Gleichung der Ortskurve für die Extrempunkte her.			
	Löse $f'_a(x) = 0$ nach a auf: $\Rightarrow a = x \cdot (x - 2)$ Also gilt für die Ortskurve: $o(x) = \frac{x \cdot (x - 2) - x^2}{e^{x-x \cdot (x-2)}} = \frac{-2x}{e^{3x-x^2}}$				4(II)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
4.3.1	...skizziert den gesamten Pfad.	
		3(I)
4.3.2	...bestimmt die Tangentengleichung mit Definitionsbereich.	
	$f_1'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{1-x}$ $f_1'(5) = 14 \cdot e^{-4}$ $f_1(5) = -24 \cdot e^{-4}$ $\Rightarrow t(x) = 14 \cdot e^{-4}(x - 5) - 24 \cdot e^{-4}$ $t(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{47}{7} \Rightarrow \text{ID}_{t(x)} = \left\{ x \mid 5 \leq x \leq \frac{47}{7} \right\}$	4(II)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ₁
	Der Prüfling	
4.3.3	...bestimmt die Gleichung der Parabel so, dass der Anschluss in der Nullstelle der Tangente differenzierbar ist.	
	<p>Tangentengleichung $t(x) = 2 \cdot e^{-4}(7x - 47)$</p> <p>Gleichung der Parabel:</p> $p(x) = x^2 + b \cdot x + c$ <p>Zu lösen ist ein Gleichungssystem mit den Bedingungen:</p> $p\left(\frac{47}{7}\right) = 0 \wedge p'\left(\frac{47}{7}\right) = t'\left(\frac{47}{7}\right) = 14 \cdot e^{-4}, \text{ d.h.}$ $\left \begin{array}{l} \left(\frac{47}{7}\right)^2 + b \cdot \frac{47}{7} + c = 0 \\ 2 \cdot \frac{47}{7} + b = 14 \cdot e^{-4} \end{array} \right \Rightarrow b = \frac{-2 \cdot (47 \cdot e^4 - 49) \cdot e^{-4}}{7} \wedge c = \frac{47 \cdot (47 \cdot e^4 - 98) \cdot e^{-4}}{49}$ $\Rightarrow p(x) = x^2 + \frac{-2 \cdot (47 \cdot e^4 - 49) \cdot e^{-4}}{7} x + \frac{47 \cdot (47 \cdot e^4 - 98) \cdot e^{-4}}{49}$ $p(x) \approx x^2 - 13,1722x + 43,36 \mid x \geq \frac{47}{7}$	5(II)
4.4		
4.4.1	... leitet mit Hilfe der Schnittpunkte von o_b und u_b Breite und Höhe des Objektes her.	
	<p>Schnittpunkte von o_b und u_b:</p> $o_b(x) = u_b(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2b \cdot x - b^2 + b = x^2 - 2(b-1) \cdot x + b^2 - b$ $\Leftrightarrow x = b-1 \vee x = b$ $o_b(b-1) = -(b-1)^2 + 2b \cdot (b-1) - b^2 + b = b-1 \Rightarrow A(b-1; b-1)$ $o_b(b) = -b^2 + 2b^2 - b^2 + b = b \Rightarrow B(b; b)$ <p>Breite und Höhe des Objekts betragen damit jeweils 1.</p>	4(III)
4.4.2	...berechnet den Flächeninhalt des Objekts.	
	<p>Die Integrationsgrenzen können aus 3.4.1 übernommen werden:</p> $\Rightarrow \int_{b-1}^b (o_b(x) - u_b(x)) dx = \int_{b-1}^b (-2x^2 + (4b-2) \cdot x - 2b \cdot (b-1)) dx$ $= \left[-\frac{2}{3} x^3 + (2b-1) \cdot x^2 - 2b \cdot (b-1) \cdot x \right]_{b-1}^b = \frac{1}{3}$	4(I)



4.4.3	...begründet eine Aussage zu Form und Größe des Objektes in Abhängigkeit von b.	
	Der Flächeninhalt beträgt unabhängig von b immer $\frac{1}{3}$ FE , Breite und Höhe des Objektes sind unabhängig von b immer 1, da es sich um Parabeln handelt, ist das Objekt von der Form her invariabel.	2(III)
4.5		
4.5.1	...bestimmt die Koordinaten der Anfangspositionen von A und B.	
	Punkt A: Nullstelle von f_1 bei $x = -1 \Rightarrow A(-1; 0)$ Punkt A: ist um 1 Einheit nach rechts und um 1 Einheit nach oben verschoben $\Rightarrow B(0; 1)$	2(I)
4.5.2	...leitet die Gleichung der Funktion her, auf deren Graph der rechte Randpunkt B „läuft“.	
	Es handelt sich um eine Verschiebung um 1E nach rechts und 1E nach oben $f_1(x-1) + 1 = -x \cdot (x-2) \cdot e^{1-x} + 1$	2(II)
4.6	...leitet den Zeitpunkt der Animation, zu dem der Punkt A (auf f_1) den minimalen Abstand zum Ursprung hat.	
	Definiere eine Abstandsfunktion wie folgt: $d(x) = \sqrt{(f_1(x))^2 + x^2} = e^{-x} \cdot \sqrt{x^2 \cdot e^{2x} + e^2 \cdot (x^4 - 2x^2 + 1)}$ Es wird im Folgenden die Funktion $d(x)^2$ betrachtet, die dieselben Extrema wie $d(x)$ hat. $(d'(x)^2) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-2x}(x \cdot e^{2x} - e^2 \cdot (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1)^2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = -0,995346 \vee x_2 = -0,424779 \vee x_3 = 0,834414$ $d(x_1) = 0,99 \quad d(x_2) = 3,43 \quad d(x_3) = 0,91$ $(d''(x_3)^2) > 0$, absolutes Minimum bei x_3 Da die Animation an der Stelle $x = -1$ startet, wird der minimale Abstand bereits nach $1,83 \cdot 50 = 91,5$ ms erreicht.	3(III)
	Summe Auswahlaufgabe 4	45
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 4	135



b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4
2	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4
3	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4
4	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3
	Summe Darstellungsleistung	15

	Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)	150
--	--	------------



8 Bewertungsbogen zur Abiturprüfung im Fach Mathematik-Informatik

Name des Prüflings: _____ Kurs: _____

Schule: _____

Aufgabe 1

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1.1					
1.1.1	...bestimmt die Bildpunkte der Abbildung.	4(I)			
1.1.2	...stellt Urbild und Bild geeignet in einem Koordinatensystem dar.	3(I)			
1.2					
1.2.1	... bestimmt den verschlüsselten Text als Zahlenfolge.	3(I)			
1.2.2	... stellt die Entschlüsselungsmatrix auf.	3(II)			
1.2.3	... zeigt, dass die Menge der 2x2 Matrizen ...	8(III)			
1.3	... gibt den entschlüsselten Text sowie die verwendeten Vorschriften ... an	4(I)			
1.4	... erläutert den Sonderfall.	2(II)			
1.5	...bestimmt mit Hilfe des Erweiterten Euklidischen Algorithmus die Inverse	4(II)			
1.6					
1.6.1	...bestimmt ... die Prüfziffer.	3(II)			
1.6.2	... bestimmt für das Buch mit der an einer Stelle falsch erfassten ... eine korrekte ISBN-Nummer.	3(II)			
1.7.1	...zeigt mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass der größte gemeinsame Teiler (ggT) von 632 und 53 gleich 1 ist.	3(II)			
1.7.2	... zeigt mit Hilfe der Eulerschen φ -Funktion ...	5(III)			
	Summe Aufgabe 1	45			



Aufgabe 2

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
2.1.1	... beschreibt den Sachverhalt mit Hilfe einer Vierfeldertafel.	8(I)			
2.1.2	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bildschirm keinen Fehler vom <i>Typ 2</i> hat.	2(I)			
2.1.3	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bildschirm, der einen Fehler vom <i>Typ 2</i> hat, nicht zusätzlich einen Fehler vom <i>Typ 1</i> hat.	4(II)			
2.2					
2.2.1	... gibt die Formel für die Verteilung der Zufallsgröße an. ... erklärt die Bedeutung der einzelnen Bestandteile.	2(I) 3(II)			
2.2.2	... bestimmt die Wahrscheinlichkeit $P(A)$... bestimmt die Wahrscheinlichkeit $P(B)$	2(I) 2(II)			
2.3	...bestimmt mit Hilfe eines Hypothesentests, wie viele dieser 100 Bildschirme maximal fehlerhaft sein dürfen.	9(II)			
2.4	... zeigt in Abhängigkeit von p , welcher Techniker am kostengünstigsten arbeitet.	13(III)			
	Summe Aufgabe 2	45			

Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
3.1					
3.1.1	... untersucht die Funktionenschar f_a auf Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter a .	4(II)			
3.1.2	...skizziert den Graphen von f_0 .	6(I)			
3.2	...bestimmt die Anzahl der Extremstellen der Schar f_a sowie deren x -Koordinaten in Abhängigkeit von a	7(II)			
3.3.1	...skizziert den gesamten Pfad.	3(I)			
3.3.2	...leitet die Gleichung der Parabel p her. ...bestimmt den Definitionsbereich der Parabel	6(III) 3(I)			
3.4					
3.4.1	... leitet mit Hilfe der Schnittpunkte von o_b und u_b Breite und Höhe des Objektes her.	5(III)			



	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
3.4.2	...berechnet den Flächeninhalt des Objekts in Abhängigkeit von b .	9(II)			
3.4.3	...begründet eine Aussage zur Abhängigkeit von Form und Größe des Objektes in Abhängigkeit von b .	2(III)			
	Summe Auswahlaufgabe 3	45			
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 3	135			

Auswahlaufgabe 4

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
4.1					
4.1.1	...skizziert je einen Graphen pro Graphentyp.	3(I)			
4.1.2	...vergleicht die wesentlichen Merkmale/Eigenschaften der jeweiligen Gruppe	5(III)			
4.2					
4.2.1	...bestimmt die Extremstellen der Schar f_a .	4(II)			
4.2.2	...leitet die Gleichung der Ortskurve für die Extrempunkte her.	4(II)			
4.3.1	...skizziert den gesamten Pfad.	3(I)			
4.3.2	...bestimmt die Tangentengleichung mit Definitionsbereich.	4(II)			
4.3.3	...bestimmt die Gleichung der Parabel so, dass der Anschluss in der Nullstelle der Tangente differenzierbar ist.	5(II)			
4.4					
4.4.1	... leitet mit Hilfe der Schnittpunkte von o_b und u_b Breite und Höhe des Objektes her.	4(III)			
4.4.2	...berechnet den Flächeninhalt des Objekts.	4(I)			
4.4.3	...begründet eine Aussage zu Form und Größe des Objektes in Abhängigkeit von b .	2(III)			
4.5					



	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
4.5.1	...bestimmt die Koordinaten der Anfangspositionen von A und B.	2(I)			
4.5.2	...leitet die Gleichung der Funktion her, auf deren Graph der rechte Randpunkt B „läuft“.	2(II)			
4.6	...leitet den Zeitpunkt der Animation, zu dem der Punkt A (auf f_1) den minimalen Abstand zum Ursprung hat.	3(III)			
	Summe Auswahlaufgabe 4	45			
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 4	135			

b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4			
2	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4			
3	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4			
4	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3			
	Summe Darstellungsleistung	15			

		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)	150			
	Aus der Punktesumme resultierende Note				
	Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 8 (4), APO-BK, Anlage D				
	Paraphe				

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____Notenpunkte) bewertet.

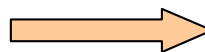
Unterschrift, Datum:



Notenfindung

% - Anteil erbrachter Leistung		Noten-Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis unter			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	95%	14	sehr gut	135	142
85%	90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	85%	12	gut plus	120	127
75%	80%	11	gut	113	119
70%	75%	10	gut minus	105	112
65%	70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	65%	8	befriedigend	90	97
55%	60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	50%	5	ausreichend	68	74
39%	45%	4	ausreichend minus	58	67
32%	39%	3	mangelhaft plus	49	57
26%	32%	2	mangelhaft	40	48
20%	26%	1	mangelhaft minus	30	39
0%	20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



150