



Zentrale Abiturprüfung 2009

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Informatik

Unterlagen für die Lehrkraft



1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Analysis: Mathematische Anforderungen an die Programmierer eines Bildschirmschoners
Aufgabe 2	Analysis: Car Modelling mit Hilfe von kubischen Splines
Aufgabe 3	Stochastik: Stochastisches Untersuchen von Antivirensoftware
Aufgabe 4	Lineare Algebra/Analytische Geometrie: Bildschirmdarstellungen 3-dimensionaler Objekte

In der Abiturprüfung sind insgesamt drei der vier Aufgaben zu bearbeiten.

Die Bearbeitung der zwei Analysis-Aufgaben ist verbindlich.

Eine Aufgabenauswahl durch die Schule findet nur zwischen den Aufgaben aus den inhaltlichen Schwerpunkten Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik statt.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

2 Aufgabenstellung

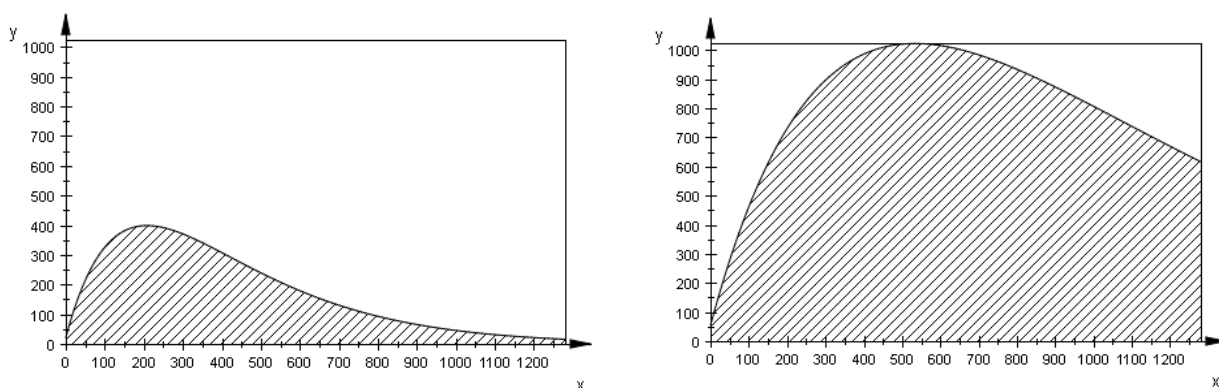
Aufgabe 1

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Das Softwareunternehmen, in dem Sie arbeiten, hat den Auftrag, einen Bildschirm-schoner zu programmieren, der den Bildschirm in zwei Bereiche teilt. Die beiden Bereiche sollen dann unterschiedlich eingefärbt werden. Es wird hierbei von einer Standard-Auflösung eines SXGA-Bildschirms mit 1280x1024 Pixeln ausgegangen. Die Trennlinie zwischen den Bereichen wird durch die Funktionsgleichung

$$f_t(x) = (5x + 0,1 \cdot t) \cdot e^{\frac{-x}{t}} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}^+ \text{ und } 0 \leq x \leq 1280$$

beschrieben. Durch Veränderung des Parameters t besteht die Möglichkeit, den Bildschirmschoner zu animieren. Sie haben die Aufgabe, dem Programmierer wichtige Eckdaten für die Programmierung des Bildschirmschoners zu liefern.



Die Grafiken zeigen jeweils einen vollständigen SXGA-Bildschirm mit 1280x1024 Pixeln.

Der Graph der Trennlinie wird im Folgenden mit G_t bezeichnet.

1.1 Damit der optisch „interessante“ Ausschnitt der Funktionsgraphen auf dem Monitor in ausreichender Größe dargestellt wird, sind für die Programmierung weitere Informationen zu bestimmen. **(23 Punkte)**

1.1.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_t mit den Koordinatenachsen.

1.1.2 Überprüfen Sie, für welche t der linke Rand des Bildschirms von G_t nicht geschnitten wird.

1.1.3 Zeigen Sie, dass G_t einen Extrempunkt in $P(0,98t|1,88t)$ und einen Wendepunkt in $W(1,98t|1,38t)$ hat.

1.1.4 Zeigen Sie, dass $F_t(x) = -(5,1 \cdot t^2 + 5,0 \cdot t \cdot x) \cdot e^{\frac{-x}{t}}$ eine Stammfunktion von f_t ist.



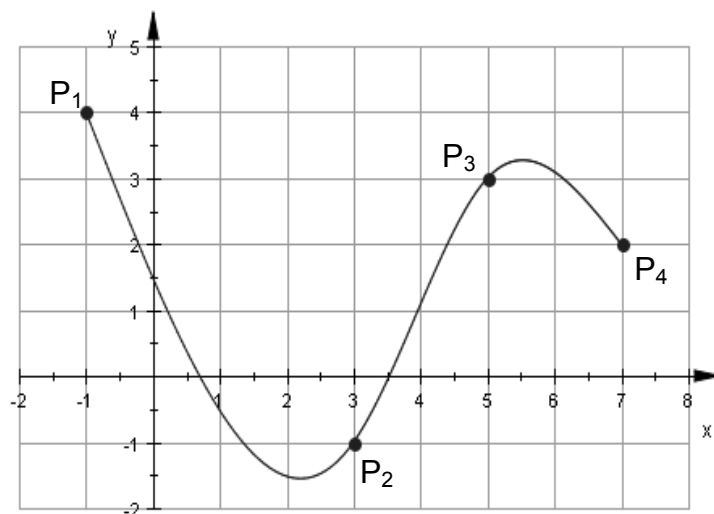
- 1.2 Zeigen Sie, dass die Trennlinien des Bildschirmschoners folgende Eigenschaft besitzen: Die Extrempunkte aller Graphen G_t liegen auf einer Geraden als Ortskurve. Geben Sie die Funktionsgleichung dieser Geraden an. **(4 Punkte)**
- 1.3 Es werden Überlegungen angestellt, die Fläche unterhalb der Trennlinie dunkel einzufärben. Dazu sollen einige prägnante t -Werte bestimmt werden. **(13 Punkte)**
- 1.3.1 Bestimmen Sie, für welchen Wert t die dunkle Fläche die Bildschirmoberkante berührt.
- 1.3.2 Bestimmen Sie, für welchen Wert t die gesamte Bildschirmfläche dunkel eingefärbt ist.
- 1.4 Sie machen den Vorschlag, die Farben unter- und oberhalb der Trennlinie zu „tauschen“, sobald 50% des Bildschirms dunkel eingefärbt sind. Prüfen Sie, ob bei $t = 391$ der Farbtasch bereits erfolgt sein muss. **(5 Punkte)**

Aufgabe 2

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

In der Automobilindustrie werden beim Car-Modelling die Informationen über das Aussehen eines Fahrzeugteils durch abschnittsweise definierte Kurvenzüge (Splines) gespeichert. Der Vorteil von Splines ist, dass mit Hilfe von Spezialsoftware verschiedene Simulationen am Computer durchgeführt werden können. Die Skizze zeigt den Teilbereich eines Konstruktionselements, welches durch Splines beschrieben wird.

Im Nachfolgenden ist ein Auszug aus einer mathematischen Dokumentation (Anlage 1) in Form eines Gleichungssystems in Matrix-Vektorform zur Bestimmung der drei Splinefunktionen sp_1 , sp_2 und sp_3 dargestellt, welche einen Kurvenzug durch die vier Punkte $P_1(-1; 4)$, $P_2(3; -1)$, $P_3(5; 3)$ und $P_4(7; 2)$ beschreiben.



- 2.1 Vervollständigen Sie die Dokumentation in den Zeilen 1, 4, 5 und 12 der Tabelle in Anlage 1, indem Sie die Bedingungen und Gleichungen angeben. **(8 Punkte)**
- 2.2 Im Gleichungssystem ist Zeile 6 der Matrix nur teilweise ausgefüllt. Ermitteln Sie eine Gleichung mit den fehlenden Koeffizienten. **(2 Punkte)**
- 2.3 Stellen Sie die noch fehlenden Bedingungen zur Bestimmung der Splinefunktionen auf. Teilen Sie die Bedingungen in Gruppen ein und begründen Sie Ihre Einteilung mathematisch. **(9 Punkte)**



Man kann die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auch mit Hilfe des Graphen einer ganzrationalen Funktion verbinden und erhält dann die Funktionsgleichung einer Schar f_k mit $f_k(x) = k \cdot (-7x^3 + 75x^2 - 161x - 51)$.

- 2.4 Bestimmen Sie k so, dass der Graph von f_k durch die angegebenen Punkte verläuft. **(3 Punkte)**

- 2.5 Zur Beurteilung von Kräften, die auf das Konstruktionselement einwirken, könnten Tangenten, Normalen sowie der Punkt mit der größten Steigung wichtig sein. Dazu betrachten wir im Folgenden $f_{\frac{1}{48}}$.

Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung im Punkt P_3 .
Berechnen Sie auch den Punkt mit der größten Steigung sowie den Zahlenwert für die größte Steigung. **(13 Punkte)**

- 2.6 In obigem System ergibt sich für den Splineabschnitt zwischen den Punkten P_2 und P_3 die Funktionsgleichung

$$sp_2(x) = \frac{1}{368}(-135x^3 + 1587x^2 - 5345x + 5029).$$

Zeigen Sie, dass in dem von den beiden Punkten vorgegebenen Intervall der maximale Abstand (in y -Richtung) zwischen dem Spline und der linearen Verbindung zwischen den beiden Punkten 0,206 LE beträgt. **(10 Punkte)**



Anlage 1:

Zur Bestimmung der Lösung aufgestelltes Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form:

$$\begin{array}{l}
 \text{Zeile 1} \\
 \text{Zeile 2} \\
 \text{Zeile 3} \\
 \text{Zeile 4} \\
 \text{Zeile 5} \\
 \text{Zeile 6} \\
 \text{Zeile 7} \\
 \text{Zeile 8} \\
 \text{Zeile 9} \\
 \text{Zeile 10} \\
 \text{Zeile 11} \\
 \text{Zeile 12}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 10 & 1 & 0 & -75 & -10 & -1 & 0 \\
 -18 & -2 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & -2 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 343 & 49 & 7 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & 5 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 2 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix}
 a_3 \\
 a_2 \\
 a_1 \\
 a_0 \\
 b_3 \\
 b_2 \\
 b_1 \\
 b_0 \\
 c_3 \\
 c_2 \\
 c_1 \\
 c_0
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 2 \\
 ? \\
 3 \\
 -1 \\
 -1 \\
 4 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Zeile	Bedingung	Gleichung
1		
2	$sp_2'(5) = sp_3'(5)$	$75b_3 + 10b_2 + b_1 = 75c_3 + 10c_2 + c_1$
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		



Auswahlaufgabe 3

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Zum Schutz firmeninterner PCs hat das Unternehmen vor einigen Jahren eine Antivirensoftware angeschafft.

- 3.1 Seither werden täglich die PCs der Firma mit der Antivirensoftware gescannt. Die Häufigkeit der dabei entdeckten Viren wird durch die Merkmalsausprägung x beschrieben.

x	0	1	2	3	4
Relative Häufigkeit	0,3	0,5	0,1	0,05	0,05

- 3.1.1 Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die zugehörige Standardabweichung. Deuten Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf die entdeckten Viren.

(4 Punkte)

- 3.1.2 Da das Antivirenprogramm in den letzten zwei Wochen keinerlei Viren mehr gefunden hat, befürchtet man, dass neue Generationen von Viren existieren, die von dem Programm nicht erkannt werden. Man entschließt sich, drei neue Antivirenprogramme einzusetzen, die verschiedene Verfahren zum Aufspüren der Viren nutzen. Antivirensoftware A erkennt Viren mit einer Wahrscheinlichkeit von 94 %, B mit einer Wahrscheinlichkeit von 93 % und C mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 %. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Datei nach Prüfung durch alle drei Antivirenprogramme virenfrei ist. (5 Punkte)

- 3.2 Aus dem Handbuch der Virensoftware B erfährt man zudem, dass die Software in 93 % der Fälle vorhandene Viren erkennt, aber in 0,1 % der Fälle nicht virenbehaftete Dateien fälschlicherweise als virenbehaftet identifiziert werden. Der Testlauf wird mit 500 Dateien durchgeführt, von denen 40 mit Viren infiziert sind.

- 3.2.1 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Testlauf mit Hilfe eines Baumdiagramms dar. (7 Punkte)

- 3.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine in diesem Testlauf von der Software erkannte Datei gar nicht infiziert war. (6 Punkte)

- 3.2.3 Ein Mitarbeiter der Firma macht folgende Aussage: „Es ist nicht notwendig, eine neue Anti-Viren-Software anzuschaffen, da von den insgesamt getesteten Dateien nur etwa 3 bis 4 als fehlerhaft identifiziert wurden – und mit die-



sem Risiko, welches dann bei 0,652 % liegt, kann man doch leben.“ Vollziehen Sie die Rechnung des Mitarbeiters nach und beurteilen Sie seine Aussage.
(5 Punkte)

3.3 Ein Anbieter einer neuen Antivirensoftware wirbt für sein Produkt mit dem Versprechen, dass die Software 96 % aller Viren erkennt und zuverlässig entfernt. Die Firma möchte dieses Angebot mit einer zufälligen Auswahl von 100 infizierten Dateien testen.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- genau zwei infizierte Dateien nicht erkannt werden
- mindestens 93 der infizierten Dateien erkannt werden. **(6 Punkte)**

3.3.2 Untersuchen Sie, wie groß die Anzahl der infizierten Dateien sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens eine defekte Datei entdeckt wird.
(4 Punkte)

3.3.3 Das Programm erkennt in 90 der infizierten Dateien Viren. Zeigen Sie mit Hilfe eines einseitigen Hypothesentests bei einem Signifikanzniveau von 4%, ob die Firma sich mit Recht gegen die Anschaffung der Software entscheidet.
(8 Punkte)

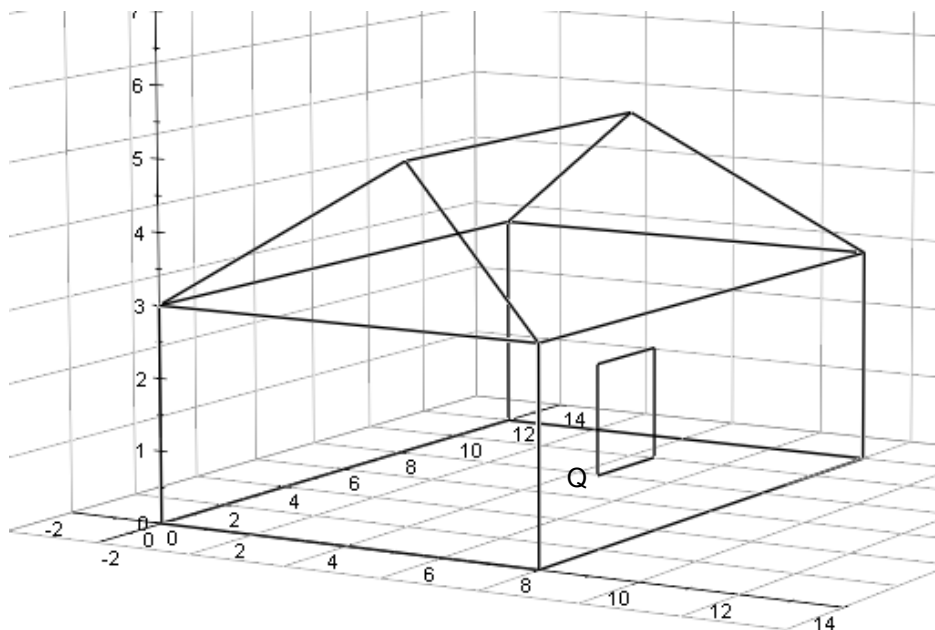
Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**

Auswahlaufgabe 4

Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

In Computerprogrammen werden dreidimensionale Objekte auf dem zweidimensionalen Bildschirm ausgegeben. Im Folgenden wird das Modell eines Hauses mit einer Grundfläche von 8 m x 12 m, einer Geschoßhöhe von 3 m und einer Gesamthöhe von 5 m betrachtet. Das Dach ist symmetrisch aufgebaut.



Innerhalb des Programms wird das Haus durch die Punkte P_1, \dots, P_{10} festgelegt. Von fünf Punkten sind die Ortsvektoren bekannt:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_5} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.1 Bestimmen Sie die Ortsvektoren der fehlenden Punkte.

(5 Punkte)

4.2 In der rechten Hauswand befindet sich ein Fenster. Die linke untere Ecke des Fensters ist durch den Punkt $Q(8; 2; 1)$ festgelegt. Das Fenster hat eine Breite von 2 m und eine Höhe von 1,5 m. Vor dem Fenster befindet sich in $R(10; 2; 4)$ eine punktförmige Lichtquelle. Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Schattenlinie, die von der oberen Fensterkante auf dem Boden innerhalb des Hauses verursacht wird.

(8 Punkte)



- 4.3 Vom Programm soll eine perspektivische Ansicht des Hauses erzeugt werden. Hierzu müssen die 3-dimensionalen in 2-dimensionale Koordinaten umgewandelt werden. Das Bildschirm-Koordinatensystem (BK) arbeitet, wie bei Computergaphiken üblich, mit einer nach unten positiv orientierten y-Achse. Die Pixelauflösung des BKs beträgt horizontal 1280 und vertikal 1024. Es wird folgende Abbildungsvorschrift angewendet:

$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha(\vec{X}) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{X'}$$

Berechnen Sie die Bildkoordinaten von $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_5}$.

Interpretieren Sie die Wirkungsweise der Abbildungsvorschrift α .

(10 Punkte)

- 4.4 Auf die 2-dimensionale Darstellung des Hauses können weitere Abbildungen angewendet werden. Untersuchen Sie die Abbildung $\beta : \vec{X'} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X'}$,

$\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf Eigenwerte und Eigenvektoren. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung Ihrer Ergebnisse.

(12 Punkte)

- 4.5 Auch Grafikprogramme sehen die Option „Aktion rückgängig machen“ vor. Ermitteln Sie die Abbildungsvorschrift β^{-1} , die die Abbildung β aus 4.4 rückgängig macht. Begründen Sie allgemein, warum Abbildungen nicht immer umkehrbar sind.

(10 Punkte)

Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**



Anhang

Tabellierte kumulierte Binomialverteilung

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
20	0	6676	5438	4420	3585	1216	0692	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	19	20
	1	9401	8802	8103	7358	3917	2669	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0000	18	
	2	9929	9790	9561	9245	6769	5353	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0002	17	
	3	9994	9973	9926	9841	8670	7653	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0013	16	
	4		9997	9990	9974	9568	9050	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0059	15	
	5			9999	9997	9887	9688	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0207	14	
	6					9976	9916	9629	9133	7858	6080	4793	2500	0577	13	
	7					9996	9981	9887	9679	8982	7723	6615	4159	1316	12	
	8					9999	9997	9972	9900	9591	8867	8095	5956	2517	11	
	9						9999	9994	9974	9861	9520	9081	7553	4119	10	
	10							9999	9994	9961	9829	9624	8725	5881	9	
	11								9999	9991	9949	9870	9435	7483	8	
	12									9998	9987	9963	9790	8684	7	
	13										9997	9991	9935	9423	6	
	14											9998	9984	9793	5	
	15												9997	9941	4	
	16													9987	3	
	17													9998	2	
	18														1	
	19														0	

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
30	0	5455	4010	2939	2146	0424	0182	0042	0012	0002	0000	0000	0000	0000	29	30
	1	8795	7731	6612	5535	1837	0962	0295	0105	0020	0003	0001	0000	0000	28	
	2	9783	9399	8831	8122	4114	2579	1028	0442	0106	0021	0007	0000	0000	27	
	3	9971	9881	9694	9392	6474	4734	2396	1227	0374	0093	0033	0003	0000	26	
	4	9997	9982	9937	9844	8245	6812	4243	2552	0979	0302	0122	0015	0000	25	
	5		9998	9989	9967	9268	8356	6164	4275	2026	0766	0355	0057	0002	24	
	6			9999	9994	9742	9275	7765	6070	3481	1595	0838	0172	0007	23	
	7				9999	9922	9725	8863	7608	5143	2814	1668	0435	0026	22	
	8					9980	9910	9494	8713	6736	4315	2860	0940	0081	21	
	9					9995	9974	9803	9389	8034	5888	4317	1763	0214	20	
	10					9999	9994	9933	9744	8943	7304	5848	2915	0494	19	
	11						9999	9980	9905	9493	8407	7239	4311	1002	18	
	12							9995	9969	9784	9155	8340	5785	1808	17	
	13							9999	9991	9918	9599	9102	7145	2923	16	
	14								9998	9973	9831	9565	8246	4278	15	
	15								9999	9992	9936	9812	9029	5722	14	
	16									9998	9979	9928	9519	7077	13	
	17										9994	9975	9788	8192	12	
	18											9998	9993	9917	11	
	19												9998	9971	10	
	20													9991	9	
	21													9998	8	
	22														7	
	23														6	
	24														5	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
50	0	3642	2181	1299	0769	0052	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	49	50
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0103	0012	0002	0000	0000	0000	0000	0000	48	
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0418	0066	0013	0001	0000	0000	0000	0000	47	
	3	9822	9372	8609	7604	2503	1138	0238	0057	0005	0000	0000	0000	0000	46	
	4	9968	9832	9510	8964	4312	2346	0643	0185	0021	0002	0000	0000	0000	45	
	5	9995	9963	9856	9622	6161	3935	1388	0480	0070	0007	0001	0000	0000	44	
	6	9999	9993	9964	9882	7702	5637	2506	1034	0194	0025	0005	0000	0000	43	
	7		9999	9992	9968	8779	7165	3911	1904	0453	0073	0017	0001	0000	42	
	8			9999	9992	9421	8339	5421	3073	0916	0183	0050	0002	0000	41	
	9				9998	9755	9121	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0000	40	
	10					9906	9579	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0000	39	
	11					9968	9817	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0000	38	
	12					9990	9928	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0002	37	
	13					9997	9974	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0005	36	
	14					9999	9991	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0013	35	
	15						9997	9943	9692	8369	5692	3690	0955	0033	34	
	16						9999	9978	9856	9017	6839	4868	1561	0077	33	
	17							9992	9937	9449	7822	6046	2369	0164	32	
	18							9997	9975	9713	8594	7126	3356	0325	31	
	19							9999	9991	9861	9152	8036	4465	0595	30	
	20								9997	9937	9522	8741	5610	1013	29	
	21								9999	9974	9749	9244	6701	1611	28	
	22									9990	9877	9576	7660	2399	27	
	23									9996	9944	9778	8438	3359	26	
	24									9999	9976	9892	9022	4439	25	
	25										9991	9951	9427	5561	24	
	26										9997	9979	9686	6641	23	
	27										9999	9992	9840	7601	22	
	28											9997	9924	8389	21	
	29											9999	9966	8987	20	
	30												9986	9405	19	
	31												9995	9675	18	
	32												9998	9836	17	
	33												9999	9923	16	
	34													9967	15	
	35													9987	14	
	36													9995	13	
	37													9998	12	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
100	0	1326	0476	0169	0059	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99	100
	1	4033	1946	0872	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98	
	2	6767	4198	2321	1183	0019	0002	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97	
	3	8590	6472	4295	2578	0078	0009	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96	
	4	9492	8179	6289	4360	0237	0035	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	95	
	5	9845	9192	7884	6160	0576	0106	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	94	
	6	9959	9688	8936	7660	1172	0267	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	93	
	7	9991	9894	9525	8720	2061	0576	0038	0003	0000	0000	0000	0000	0000	92	
	8	9998	9968	9810	9369	3209	1088	0095	0009	0000	0000	0000	0000	0000	91	
	9		9991	9932	9718	4513	1837	0213	0023	0000	0000	0000	0000	0000	90	
	10		9998	9978	9885	5832	2810	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000	89	
	11			9993	9957	7030	3947	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	88	
	12			9998	9985	8018	5152	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	87	
	13				9995	8761	6318	2001	0469	0025	0001	0000	0000	0000	86	
	14				9999	9274	7352	2875	0804	0054	0002	0000	0000	0000	85	
	15					9601	8199	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	84	
	16					9794	8842	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	83	
	17					9900	9296	5995	2712	0376	0022	0002	0000	0000	82	
	18					9954	9595	6965	3621	0630	0045	0005	0000	0000	81	
	19					9980	9780	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	80	
	20					9992	9886	8482	5595	1488	0165	0024	0000	0000	79	
	21					9997	9944	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	78	
	22					9999	9974	9370	7389	2864	0479	0091	0001	0000	77	
	23						9989	9622	8109	3711	0755	0164	0003	0000	76	
	24						9995	9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	75	
	25						9998	9881	9125	5535	1631	0459	0012	0000	74	
	26						9999	9938	9442	6417	2244	0716	0024	0000	73	
	27							9969	9658	7224	2964	1067	0046	0000	72	
	28							9985	9800	7925	3768	1526	0084	0000	71	
	29							9993	9888	8505	4623	2095	0148	0000	70	
	30							9997	9939	8962	5491	2768	0248	0000	69	
	31							9999	9969	9307	6331	3528	0398	0001	68	
	32								9984	9554	7107	4347	0615	0002	67	
	33								9993	9724	7793	5191	0913	0004	66	
	34								9997	9836	8371	6022	1303	0009	65	
	35								9999	9906	8839	6806	1795	0018	64	
	36								9999	9948	9201	7513	2386	0033	63	
	37									9973	9470	8125	3068	0060	62	
	38									9986	9660	8632	3822	0105	61	
	39									9993	9790	9035	4621	0176	60	
	40									9997	9875	9342	5433	0284	59	
	41									9999	9928	9567	6225	0443	58	
	42									9999	9960	9725	6967	0666	57	
	43										9979	9831	7635	0967	56	
	44										9989	9900	8211	1356	55	
	45										9995	9943	8689	1841	54	
	46										9997	9969	9070	2421	53	
	47										9999	9983	9362	3086	52	
	48										9999	9992	9577	3822	51	
	49											9996	9729	4602	50	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



3 Materialgrundlage

keine

4 Bezüge zu den „Vorgaben für die Abiturprüfung am Berufskolleg im Jahr 2009“

- **Aufgabe 1: Exponentialfunktionen**
 - **Funktionseigenschaften**
 - Kurvenscharen
 - Ableitungsregeln
 - Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte
 - **Integration**
 - Bestimmung von Stammfunktionen
 - Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals

- **Aufgabe 2: Ganzrationale Funktionen**
 - **Funktionseigenschaften**
 - Kurvenscharen
 - Ableitungsregeln
 - Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte
 - **Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Bedingungen**
 - Lineare Gleichungssysteme mit vier Unbekannten
 - Splines

- **Auswahlaufgabe 3: Stochastik**
 - **Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung**
 - Ergebnis, Ereignis, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln, Zählstrategien
 - Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vier-Felder-Tafeln
 - Satz von Bayes
 - **Binominalverteilung**
 - Kenngrößen der Binomialverteilung,

- **Auswahlaufgabe 4: Lineare Algebra**
 - **Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum**
 - Darstellungsformen von Geraden und Ebenen
 - Schnittpunkte und Schnittgeraden
 - **Grundlagen der Matrizenrechnung**
 - Elementare Matrizenoperationen
 - Lineare Abbildungen und ihre Verkettungen
 - Abbildungsmatrizen und affine Abbildungen
 - Umkehrbare Abbildungen



5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2009 sind zugelassen:
 - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
 - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung, s. Anhang dieses Dokumentes,
 - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2009 sind **nicht** zugelassen:
 - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
 - Computeralgebrasysteme
 - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Erstellen von Wertetabellen
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

Die beiden Aufgaben zur Analysis (Aufgabe 1 und Aufgabe 2) sind verbindlich zu bearbeiten. Von den Aufgaben zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie (Aufgabe 3) und zur Stochastik (Aufgabe 4) wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Prüfungsaufgaben zur Bearbeitung. Sie erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

Die schriftliche Prüfung dauert gemäß § 17 Anlage D, APO-BK, viereinviertel Zeitstunden.

7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

7.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Die Lösungserwartungen dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen. Zusätzliche Leistungen sind angemessen zu berücksichtigen. Dies betrifft etwa Lösungen, die bei den Lösungserwartungen nicht aufgeführt sind, aber dennoch richtige Lösungen sind.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die kleinste Einheit zur Bewertung der erbrachten Schülerleistung im Rahmen der kriteriellen Leistungserfassung ist 1 Punkt. Dementsprechend können nur ganze Punkte vergeben werden.

Die Teilleistungen werden den in Teil I der Bildungspläne definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet. Danach werden den Lösungen der Teilaufgaben Punkte zugewiesen, die den Schwierigkeitsgrad, die Komplexität und den Zeitaufwand für die Bearbeitung der einzelnen Teilaufgabe repräsentieren. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität. Hinzu kommt die Art der Bearbeitung in den verschiedenen Anforderungsbereichen, wobei Aspekte der Qualität, Quantität und der Darstellungsweise berücksichtigt werden.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein.

Die inhaltlichen Leistungen werden aufgabenbezogen, die Darstellungsleistungen aufgabenübergreifend bewertet.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 8 Abs. 3 APO-BK) wird im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistung getroffen. Schwerwiegende und gehäufte Verstöße führen zu einem Abzug von 1 bis 2 Punkten bei der Leistungsbewertung den entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein.



7.2 Erfassung der Teilleistungen

a) inhaltliche Leistung

Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
1	1.1		<p>Es wird hierbei von einer Standard-Auflösung eines SXGA-Bildschirms mit 1280x1024 Pixeln ausgegangen. Die Trennlinie zwischen den Bereichen wird durch die Funktionsgleichung</p> $f_t(x) = (5 \cdot x + 0,1 \cdot t) \cdot e^{-\frac{x}{t}} \text{ mit } t \in \mathbb{R}^+ \text{ und } 0 \leq x \leq 1280 \text{ beschrieben.}$ <p>Damit der optisch „interessante“ Ausschnitt der Funktionsgraphen auf dem Monitor in ausreichender Größe dargestellt wird, sind für die Programmierung weitere Informationen zu bestimmen.</p>			
			Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_t mit den Koordinatenachsen.			
		1.1.1	<p>Schnittpunkt mit der y-Achse:</p> $y_s = f_t(0) \Leftrightarrow y_s = (5 \cdot 0 + 0,1 \cdot t) \cdot e^{-\frac{0}{t}} \Leftrightarrow y_s = 0,1 \cdot t ; S_y(0; 0,1 \cdot t)$ <p>Schnittpunkte mit der x-Achse/Nullstellen:</p> $f_t(x_0) = 0 \Leftrightarrow (5 \cdot x_0 + 0,1 \cdot t) \cdot e^{-\frac{x_0}{t}} = 0$ <p>Fall 1: $e^{-\frac{x_0}{t}} = 0$; wird für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.</p> <p>Fall 2: $(5 \cdot x_0 + 0,1 \cdot t) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{50} \cdot t$</p> <p>Ein Schnittpunkt mit der x-Achse liegt nicht im Definitionsbereich.</p>	4		
			Überprüfen Sie, für welche t der linke Rand des Bildschirms von G_t nicht geschnitten wird.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
		1.1.2	<p>1. Fall:</p> $f_t(0) < 0 \Leftrightarrow 0,1 \cdot t \cdot e^{\frac{0}{t}} < 0 \Leftrightarrow t < 0$ <p>Da $t \in \mathbb{R}^+$, kann dieser Fall nie eintreten.</p> <p>2. Fall:</p> $f_t(0) > 1024 \Leftrightarrow 0,1 \cdot t > 1024 \Leftrightarrow t > 10240$ <p>Für $t > 10240$ schneiden die Graphen der Funktion f_t nicht mehr den linken Rand des Bildschirms.</p>		3	
			Zeigen Sie, dass G_t einen Extrempunkt in $P(0,98t 1,88t)$ und einen Wendepunkt in $W(1,98t 1,38t)$ hat.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
		1.1.3	<p>Erforderliche Ableitungen mittels Produktregel:</p> $f'_t(x) = (4,9 - \frac{5}{t}x) \cdot e^{-\frac{x}{t}}; f''_t(x) = (-\frac{9,9}{t} + \frac{5}{t^2}x) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$ $f'''_t(x) = (\frac{14,9}{t^2} - \frac{5}{t^3}x) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$ <p>Hinr. Bed. für Extrempunkte: $f'_t(x_e) = 0 \wedge f''_t(x_e) \neq 0$</p> $f'_t(x_e) = (4,9 - \frac{5}{t}x_e) \cdot e^{-\frac{x_e}{t}} = 0$ <p>Fall 1: $e^{-\frac{x_e}{t}} = 0$; wird für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt</p> <p>Fall 2: $(4,9 - \frac{5}{t}x_e) = 0 \Leftrightarrow x_e = 0,98 \cdot t$</p> $f''_t(x_e) = (-\frac{9,9}{t} + \frac{5}{t^2} \cdot 0,98 \cdot t) \cdot e^{-\frac{0,98 \cdot t}{t}} = -\frac{5 \cdot e^{-0,98}}{t} < 0$ <p>$\Rightarrow x_e = 0,98 \cdot t$ sind Extremstellen und zwar von Hochpunkten</p> $f_t(0,98 \cdot t) = (5 \cdot 0,98 \cdot t + 0,1 \cdot t) \cdot e^{-\frac{-0,98 \cdot t}{t}} = 1,88 \cdot t; \text{HP}(0,98t; 1,88t)$ <p>Hinr. Bed. für Wendepunkte: $f''_t(x_w) = 0 \wedge f'''_t(x_w) \neq 0$</p> $f''_t(x_w) = (-\frac{9,9}{t} + \frac{5}{t^2}x_w) \cdot e^{-\frac{x_w}{t}} = 0$ <p>Fall 1: $e^{-\frac{x_e}{t}} = 0$; wird für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt</p> <p>Fall 2: $(-\frac{9,9}{t} + \frac{5}{t^2}x_w) = 0 \Leftrightarrow x_w = 1,98 \cdot t$</p> $f'''_t(x_w) = (\frac{14,9}{t^2} - \frac{5}{t^3}x_w) \cdot e^{-\frac{x_w}{t}} = \frac{5 \cdot e^{-1,98}}{t^2} > 0$ <p>$\Rightarrow x_w = 1,98 \cdot t$ sind Wendestellen $W(1,98t 1,38t)$</p>			
					5	8



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
			Zeigen Sie, dass $F_t(x) = -(5,1 \cdot t^2 + 5,0 \cdot t \cdot x) \cdot e^{\frac{-x}{t}}$ eine Stammfunktion von $f_t(x)$ ist.			
		1.1.4	$F_t'(x) = -5 \cdot t \cdot e^{\frac{-x}{t}} - (5,1 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot x) \cdot \left(\frac{-1}{t}\right) \cdot e^{\frac{-x}{t}}$ $= (0,1 \cdot t + 5 \cdot x) \cdot e^{\frac{-x}{t}} = f_t(x)$			3
	1.2		Zeigen Sie, dass die Trennlinie des Bildschirmschoners folgende Eigenschaft besitzt. Die Extrempunkte aller Graphen G_t liegen auf einer Geraden als Ortskurve.			
			Geben Sie die Funktionsgleichung dieser Geraden an			
		1.2.1	$HP(0,98 \cdot t; 5 \cdot t \cdot e^{-0,98})$ $y_e = 5 \cdot t \cdot e^{-0,98}$ und $x_e = 0,98 \cdot t$ mit $t = \frac{x_e}{0,98}$ folgt: $y_e = \frac{250}{49} \cdot e^{-0,98} \cdot x_e = 1,91 \cdot x_e$			
					1	3
	1.3		Es werden Überlegungen angestellt, die Fläche unterhalb der Trennlinie dunkel einzufärben. Dazu sollen einige prägnante t-Werte bestimmt werden.			
			Bestimmen Sie, für welchen Wert t die dunkle Fläche die Bildschirmoberkante berührt.			
		1.3.1	$5 \cdot t \cdot e^{-0,98} = 1024 \Leftrightarrow t \approx 546$	4		
			Bestimmen Sie, für welchen Wert t die gesamte Bildschirmfläche dunkel eingefärbt ist.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
		1.3.2	Der y-Achsenabschnitt der Trennlinie bewegt sich mit wachsendem t nach oben. Der Punkt P(0 1024) wird für t = 10240 zum Kurvenpunkt. Da der einzige Hochpunkt bei diesem t-Wert an der Stelle $x_e = 10035$ liegt, ist die Funktion im Darstellungsbereich streng monoton steigend, so dass der Punkt P für diesen t-Wert im Bereich zwischen 0 und 1280 ein lokales Minimum darstellt. Somit verlässt für t = 10240 der letzte Kurvenpunkt den Bildschirmbereich.	4	5	
		1.4	Sie machen den Vorschlag, die Farben unter- und oberhalb der Trennlinie zu „tauschen“, sobald 50% des Bildschirms dunkel eingefärbt sind. Prüfen Sie, ob der Programmierer für t = 391 den Farbtasch vorsehen soll.			
		1.4.1	Die Bildschirmfläche beträgt 1280x1024 FE. Der dunkel eingefärbte Bereich dürfte demnach nur 655360 FE groß sein. $\int_0^{1280} f_{391}(x) dx = \int_0^{1280} (5 \cdot x + 0,1 \cdot 391) \cdot e^{\frac{-x}{391}} dx =$ $\left[- (5,1 \cdot 391^2 + 5,0 \cdot 391 \cdot x) \cdot e^{\frac{-x}{391}} \right]_0^{1280} = 655408$ Folglich müsste der Farbtasch bei t=391 bereits erfolgt sein.		5	
			Summe in den Anforderungsbereichen	12	19	14
			Summe Aufgabe 1	45		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
2	2.1		Vervollständigen Sie die Dokumentation in den nicht-grauen Feldern der Tabelle, indem Sie die Bedingungen und Gleichungen angeben (Anlage 1).			
		2.1.1	Zeile 1: $sp_1'(3) = sp_2'(3)$ und $27a_3 + 6a_2 + a_1 = 27b_3 + 6b_2 + b_1$ Zeile 4: $sp_2''(5) = sp_3''(5)$ und $30b_3 + 2b_2 = 30c_3 + 2c_2$ Zeile 5: $sp_3(7) = 2$ und $343c_3 + 49c_2 + 7c_1 + c_0 = 2$ Zeile 12: $sp_3''(7) = 0$ und $42c_3 + 2c_2 = 0$	8		
	2.2		Im Gleichungssystem ist Zeile 6 nur teilweise ausgefüllt. Ermitteln Sie eine Gleichung mit den fehlenden Koeffizienten.			
		2.2.1	In der Dokumentation fehlt die Forderung, dass der Punkt P_3 auch auf dem dritten Spline liegen muss. $sp_3(5) = 3$ und $125 \cdot c_3 + 25 \cdot c_2 + 5 \cdot c_1 + c_0 = 3$ Die Koeffizienten für b_i sind jeweils Null.	2		
	2.3		Stellen Sie die noch fehlenden Bedingungen zur Bestimmung der Splinefunktionen auf. Teilen Sie die Bedingungen in Gruppen ein und begründen Sie Ihre Einteilung mathematisch.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
		2.3.1	<p>Fehlende Bedingungen:</p> <p>Zeile 3: $sp''_1(x) = sp''_2(3)$</p> <p>Zeile 7: $sp_2(5) = 3$</p> <p>Zeile 8: $sp_2(3) = -1$</p> <p>Zeile 9: $sp_1(3) = -1$</p> <p>Zeile 10: $sp_1(-1) = 4$</p> <p>Zeile 11: $sp_1''(-1) = 0$</p> <p><u>Gruppen:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> Bedingungen, die sich auf die Punktkoordinaten beziehen (Stetigkeit) $sp_1(-1)=4$, $sp_1(3)=-1$, $sp_2(3)=-1$, $sp_2(5)=3$, $sp_3(5)=3$, $sp_3(7)=2$ Bedingungen, die sich auf die gleiche Steigung in den Stützstellen beziehen (Differenzierbarkeit) $sp_1'(3)=sp_2'(3)$ und $sp_2'(5)=sp_3'(5)$ Bedingungen, die sich auf die gleiche Krümmung in den Stützstellen beziehen (2x differenzierbar) $sp_1''(3)=sp_2''(3)$ und $sp_2''(5)=sp_3''(5)$ Randbedingungen (hier: Krümmung in den Randpunkten wird Null) $sp_1''(-1)=0$ und $sp_3''(7)=0$ 			
	2.4		Bestimmen Sie k so, dass der Graph von $f_k(x)$ durch die angegebenen Punkte verläuft.			
		2.4.1	$f_k(-1) = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{48}$, $f_{\frac{1}{48}}(3) = -1$, $f_{\frac{1}{48}}(5) = 3$ und $f_{\frac{1}{48}}(7) = 2$	3		
	2.5		Zur Beurteilung von Kräften, die auf das Konstruktionselement einwirken, könnten Tangenten, Normalen sowie der Punkt mit der größten Steigung wichtig sein.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
			Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung für $f_{\frac{1}{48}}$ im Punkt P_3.			
		2.5.1	$f_{\frac{1}{48}}(x) = \frac{1}{48} \cdot (-7 \cdot x^3 + 75 \cdot x^2 - 161 \cdot x - 51)$ $\Rightarrow f'_{\frac{1}{48}}(x) = \frac{1}{48} \cdot (-21 \cdot x^2 + 150 \cdot x - 161)$ <p>Dann gilt: $f'_{\frac{1}{48}}(5) = \frac{4}{3}$</p> <p>Tangentengleichung in P_3: $t(x) = \frac{4}{3} \cdot (x - 5) + 3$</p> <p>Normalengleichung in P_3: $n(x) = \frac{-3}{4} \cdot (x - 5) + 3$</p>	2	4	
			Berechnen Sie auch den Punkt mit der größten Steigung sowie den Zahlenwert für die größte Steigung.			
		2.5.2	$f'_{\frac{1}{48}}(x) = \frac{1}{48} \cdot (-21 \cdot x^2 + 150 \cdot x - 161)$ $\Rightarrow f''_{\frac{1}{48}}(x) = \frac{1}{48} \cdot (-42 \cdot x + 150)$ $\Rightarrow f'''_{\frac{1}{48}}(x) = \frac{-7}{8}$ $f''_{\frac{1}{48}}(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{7}{8}x + \frac{25}{8} \Leftrightarrow x = 3\frac{4}{7}$ $f''_{\frac{1}{48}}(3\frac{4}{7}) = 0 \wedge f'''_{\frac{1}{48}}(3\frac{4}{7}) < 0 \Rightarrow (3,57 0,245) \text{ ist der Punkt mit der größten Steigung. Die Steigung beträgt } \approx 2,226$ <p>Randpunkte sind nicht zu betrachten, da es sich bei $f'_{\frac{1}{48}}$ um eine nach unten geöffnete Parabel handelt.</p>	1	6	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
	2.6		In obigem System ergibt sich für den Splineabschnitt zwischen den Punkten P_2 und P_3 die Funktionsgleichung $sp_2(x) = \frac{1}{368}(-135x^3 + 1587x^2 - 5345x + 5029).$			
			Zeigen Sie, dass in dem von den beiden Punkten vorgegebenen Intervall der maximale Abstand (in y-Richtung) zwischen dem Spline und der linearen Verbindung zwischen den beiden Punkten 0,206 LE beträgt.			
	2.6.1		Aufstellen der linearen Funktion: $P_2(3; -1) \wedge P_3(5; 3) \wedge g(x) = m \cdot x + b$ $\Rightarrow g(x) = 2 \cdot x - 7$ Bilden der Differenzfunktion zur Bestimmung des Abstandes: $f(x) := sp_2(x) - g(x)$ $f(x) \approx -0,367x^3 + 4,313x^2 - 16,524x + 20,666$ $\Rightarrow f'(x) \approx -1,1x^2 + 8,63x - 16,5$ $\Rightarrow f''(x) \approx -2,2x + 8,63$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1,1x^2 + 8,63x - 16,5 = 0 \Leftrightarrow x = 3,34 \vee x = 4,5$ $f''(3,34) \approx 1,28$; $f''(4,5) \approx -1,27$ In $(3,34 -0,086)$ liegt ein lokaler Tiefpunkt vor. In $(4,5 0,206)$ liegt ein lokaler Hochpunkt vor. Der maximale Abstand in y-Richtung beträgt somit 0,206 LE.			10
			Summe in den Anforderungsbereichen	14	18	13
			Summe Aufgabe 2	45		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Schülerlösung	I	II	III
3	3.1		Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die zugehörige Standardabweichung. Deuten Sie Ihre Ergebnisse.			
		3.1.1	$\bar{x} = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,05 = 1,05$ $\sigma = \sqrt{0,3 \cdot (-1,05)^2 + 0,5 \cdot (-0,05)^2 + \dots + 0,05 \cdot (2,95)^2}$ $= 1,02347$ <p>Auf lange Sicht ist im Durchschnitt täglich mit dem Auffinden eines Virus und mit einer Streuung von 0 bis 2 Viren zu rechnen.</p>	4		
			Antivirensoftware A erkennt Viren mit einer Wahrscheinlichkeit von 94 %, B mit einer Wahrscheinlichkeit von 93 % und C mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 %. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Datei nach Prüfung durch alle drei Antivirenprogramme virenfrei ist.			
		3.1.2	$P(A \cup B \cup C) =$ $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$ $- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$ $0,94 + 0,93 + 0,92 - 0,94 \cdot 0,93 - 0,94 \cdot 0,92$ $- 0,93 \cdot 0,92 + 0,94 \cdot 0,93 \cdot 0,92 \approx 0,9997$ <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit 99,97 % müsste eine Datei nach dem Scannen mit allen drei Programmen virenfrei sein.</p>	3		2
	3.2		Aus dem Handbuch der Virensoftware B erfährt man zudem, dass die Software in 93 % der Fälle vorhandene Viren erkennt, aber in 0,1 % der Fälle nicht virenbehaftete Dateien fälschlicherweise als virenbehaftet identifiziert werden. Der Testlauf wird mit 500 Dateien durchgeführt, von denen 40 mit Viren infiziert sind.			
			Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Testlauf mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforderungsbereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Schülerlösung	I	II	III
		3.2.1	<p>Baumdiagramm für die Wahrscheinlichkeiten</p> <p>V: Virus Ve: Virus erkannt</p> <p>kV: kein Virus Vne: Virus nicht erkannt</p> <p>$P(V) = \frac{40}{500} = 0,08$ und $P(kV) = \frac{460}{500} = 0,92$</p>	2	5	
			Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine in diesem Testlauf von der Software erkannte Datei gar nicht infiziert war.			
		3.2.2	<p>Berechnung der Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass eine vermeintlich infizierte Datei (Ve) nicht infiziert ist (kV)</p> <p>$P_{Ve}(kV) = \frac{P(kV \cap Ve)}{P(Ve)} = \frac{0,92 \cdot 0,001}{0,08 \cdot 0,93 + 0,92 \cdot 0,001} = 0,0122$</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1,22 %.</p>	2	4	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Schülerlösung	I	II	III
			Ein Mitarbeiter der Firma trifft folgende Aussage: „Es ist nicht notwendig, eine neue Anti-Viren-Software anzuschaffen, da von den insgesamt getesteten Dateien nur etwa 3 bis 4 als fehlerhaft identifiziert wurden – und mit diesem Risiko, welches dann bei 0,652 % liegt, kann man doch leben.“ Vollziehen Sie die Rechnung des Mitarbeiters nach und beurteilen Sie seine Aussage.			
		3.2.3	<p>Nachweis der Rechnung</p> $\frac{40 \cdot 0,07 + 460 \cdot 0,001}{500} = \frac{3,26}{500} = 0,00652 = 0,652 \%$ <p>Beurteilung der Aussage</p> <p>Die Rechnung des Mitarbeiters bezieht die nichtinfizierten Dateien mit ein. Dies kann irreführend sein, da 7 % der infizierten Dateien nicht erkannt werden.</p>			5
	3.3		Ein Anbieter einer neuen Antivirensoftware wirbt für sein Produkt mit dem Versprechen, dass die Software 96 % aller Viren erkennt und zuverlässig entfernt. Die Firma möchte dieses Angebot mit einer zufälligen Auswahl von 100 infizierten Dateien testen.			
			Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass - genau zwei infizierte Dateien nicht erkannt werden, - mindestens 93 der infizierten Dateien erkannt werden.			
		3.3.1	<p>X: ist Anzahl der nicht erkannten Viren</p> $P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0,2321 - 0,0872 = 0,1449$ <p>X: ist Anzahl der erkannten Viren</p> $P(X \geq 93) = 1 - P(X \leq 92) = 1 - 0,0475 = 0,9525$	3	3	
			Untersuchen Sie, wie groß die Anzahl der infizierten Dateien sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens eine defekte Datei entdeckt wird.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Schülerlösung			
		3.3.2	$P(X \neq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,96^n \cdot 0,04^0 \geq 0,99$ $1 - 0,96^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,96)} \geq n \Leftrightarrow 112,811 \geq n$		4	
			Das Programm erkennt in 90 der infizierten Dateien Viren. Zeigen Sie mit Hilfe eines einseitigen Hypothesentests bei einem Signifikanzniveau von 4%, ob die Firma sich mit Recht gegen die Anschaffung der Software entscheidet.			
		3.3.3	<p>Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest.</p> <p>X beschreibt die Anzahl der virenbehafteten Dateien unter 100</p> <p>$H_0: p \geq 0,96$</p> <p>$H_1: p < 0,96$</p> <p>X ist bei wahrer Nullhypothese im ungünstigsten Fall $B(100; 0,96)$ verteilt.</p> <p>Es ist der Ablehnungsbereich durch $K = \{0, \dots, g\}$ anzugeben.</p> <p>$P(X \leq g) \leq 0,04$</p> <p>Mit Hilfe der Tabelle ergibt sich der Wert $g = 91$.</p> <p>Sollten nur bis zu 91 vireninferzierte Dateien erkannt werden, so ist die Software abzulehnen.</p>		2	6
			Summe in den Anforderungsbereichen	14	18	13
			Summe Auswahl Aufgabe 3	45		



			Summe Aufgabe 1	45
			Summe Aufgabe 2	45
			Summe Auswahlaufgabe 3	45
			Summe Aufgaben 1, 2 und 3	135



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
4	4.1		Bestimmen Sie die Ortsvektoren der fehlenden Punkte.			
		4.1.1	$\overrightarrow{OP_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_7} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_8} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_9} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_{10}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$	5		
	4.2		In der rechten Hauswand befindet sich ein Fenster. Die linke untere Ecke des Fensters ist durch den Punkt Q(8; 2; 1) festgelegt. Das Fenster hat eine Breite von 2 m und eine Höhe von 1,5 m. Vor dem Fenster befindet sich in R(10; 2; 4) eine punktförmige Lichtquelle.			
			Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Schattenlinie, die von der oberen Fensterkante auf dem Boden innerhalb des Hauses verursacht wird.			
		4.2.1	<p>Es sind die Schnittpunkte der Strahlen durch die 2 Fensterecken mit der x_1-x_2-Ebene zu bestimmen.</p> <p>Der 1. Strahl verläuft durch Q und S(8; 2; 2,5):</p> $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ <p>Für $t = -\frac{8}{3}$ wird die x_3-Koordinate zu 0. Somit $S_1\left(4\frac{2}{3}; 2\right)$</p> <p>Der 2. Strahl verläuft durch Q und T(8; 4; 2,5):</p> $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ <p>Für $t = -\frac{8}{3}$ wird die x_3-Koordinate zu 0. Somit $S_2\left(4\frac{2}{3}; 7\frac{1}{3}\right)$</p>	4	4	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
	4.3		<p>Vom Programm soll eine perspektivische Ansicht des Hauses erzeugt werden. Hierzu müssen die 3-dimensionalen in 2-dimensionale Koordinaten umgewandelt werden. Das Bildschirm-Koordinatensystem(BK) arbeitet, wie bei Computergaphiken üblich, mit einer nach unten positiv orientierten y-Achse. Die Pixelauflösung des BK beträgt horizontal 1280 und vertikal 1024. Es wird folgende Abbildungsvorschrift angewendet:</p> $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha(\vec{X}) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{X}'$			
			Berechnen Sie die Bildkoordinaten von $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_5}$.			
	4.3.1		<p>Berechnung der Koordinaten:</p> $\overrightarrow{OP_1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OP_5}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 286 \\ 724 \end{pmatrix}$			6
			Interpretieren Sie die Wirkungsweise der Abbildungsvorschrift $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.			
	4.3.2		$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$ <p>$\begin{pmatrix} 0 \\ 1024 \end{pmatrix}$: Verschiebung in y-Richtung</p> <p>Faktor 50 : Vergrößerung/Streckung des Objektes</p>	4		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
			$\begin{pmatrix} 1 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & -\sin(30^\circ) & -1 \end{pmatrix}$: x_1 -Komponente bleibt erhalten, x_2 -Komponente wird um 30° gedreht, x_3 -Komponente wird gespiegelt.			
	4.4		Auf die 2-dimensionale Darstellung des Hauses können weitere Abbildungen angewendet werden. Untersuchen Sie die Abbildung $\beta: \vec{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}$, $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf Eigenwerte und Eigenvektoren. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung Ihrer Ergebnisse.			
	4.4.1		Aufstellung der charakteristischen Gleichung für die Achsenaffinität: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Bestimmung der Eigenwerte: $0 = (4-\lambda) \cdot (-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 2$ $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$		4	
	4.4.2		Bestimmung der Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x - 6y = x \\ x - y = y \end{matrix} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x - 6y = 2x \\ x - y = 2y \end{matrix} \Rightarrow x = 3y \Rightarrow \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$		6	
	4.4.3		Die Geraden $g: \vec{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Fixgeraden der Abbildung.		2	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
	4.5		Auch Grafikprogramme sehen die Option „Aktion rückgängig machen“ vor. Ermitteln Sie die Abbildungsvorschrift β^{-1}, die die Abbildung β aus 4.4 rückgängig macht. Begründen Sie, warum Abbildungen nicht immer umkehrbar sind.			
	4.5.1		Die Umkehrabbildung wird durch die inverse Matrix realisiert. Bestimmung der Inversen zu $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix}$ (Verfahren zur Inversen-Bestimmung beliebig) $\beta^{-1} : \bar{X}' = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \bar{X}''$		4	
	4.5.2		Wenn mit einer Matrix A abgebildet wird, zu der keine Inverse existiert, so ist die Umkehrung der Aktion nicht möglich. Auf die Nicht-Existenz der Inversen kann über die Determinante ($\det A = 0$) oder den Rang ($\text{Rang } A < 2$) geschlossen werden.			6
			Summe in den Anforderungsbereichen	13	20	12
			Summe Auswahlaufgabe 4	45		

			Summe Aufgabe 1	45
			Summe Aufgabe 2	45
			Summe Auswahlaufgabe 4	45
			Summe Aufgaben 1, 2 und 4	135



b) Darstellungsleistung (aufgabenübergreifend)

	Kriterien zur Erfassung der Darstellungsleistung	Lösungs- qualität und Punkte
1	Strukturierte Darstellung und Beschreibung des Lösungsweges	4
	<p>Die Schülerin / der Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> ◇ gliedert die Lösung sachlogisch (ein „roter Faden“ ist erkennbar). ◇ stellt den Lösungsweg nachvollziehbar und stringent dar. ◇ bezieht Bild- oder Textquellen sowie sonstige Materialien sinnvoll und angemessen zur Erläuterung des Lösungsweges ein. 	
2	Qualität der äußeren Form und Einhaltung formaler Regeln	4
	<p>Die Schülerin / der Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> ◇ stellt Inhalte bzw. Ergebnisse übersichtlich und gut lesbar dar. ◇ berücksichtigt formale Darstellungsregeln bei der Lösung in angemessener Weise. 	
3	Verwendung von Fachsprache und Fachsymbolik	4
	<p>Die Schülerin / der Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> ◇ verwendet Fachbegriffe problemgerecht. ◇ setzt fachliche Symbole, Formeln, Maßeinheiten sachgerecht ein. 	
4	Qualität der Zeichnungen, Grafiken und Tabellen	3
	<p>Die Schülerin / der Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> ◇ stellt die Zeichnungen, Grafiken u. ä. übersichtlich, normgerecht und bildlich korrekt dar. ◇ fertigt Zeichnungen, Grafiken u. ä. entsprechend den Anforderungen des Faches an. 	
	Summe Darstellungsleistung	15
	Gesamtsumme aus 7.2a und 7.2b	150

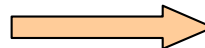


7.3 Bewertung (Notenfindung)

Notenfindung

% Anteil erbrachter Leistung		Noten-Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis unter			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	95%	14	sehr gut	135	142
85%	90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	85%	12	gut plus	120	127
75%	80%	11	gut	113	119
70%	75%	10	gut minus	105	112
65%	70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	65%	8	befriedigend	90	97
55%	60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	50%	5	ausreichend	68	74
39%	45%	4	ausreichend minus	58	67
32%	39%	3	mangelhaft plus	49	57
26%	32%	2	mangelhaft	40	48
20%	26%	1	mangelhaft minus	30	39
0%	20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



150

Notenpunkte	
-------------	--

Begründung

Notenpunkte	
-------------	--