



Zentrale Abiturprüfung 2009

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Informatik

Unterlagen für die Lehrkraft



1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Analysis: Untersuchung von TrueType™ Schriften
Aufgabe 2	Analysis: Datenübertragung in Lichtwellenleitern: Dämpfungs- und Dispersionseigenschaften
Aufgabe 3	Stochastik: Datenübertragung bei Lichtwellenleitern: Untersuchung der Fehleranfälligkeit
Aufgabe 4	Lineare Algebra/Analytische Geometrie: Rotation eines Tetraeders bei einer Spielprogrammierung

In der Abiturprüfung sind insgesamt drei der vier Aufgaben zu bearbeiten.

Die Bearbeitung der zwei Analysis-Aufgaben ist verbindlich.

Eine Aufgabenauswahl durch die Schule findet nur zwischen den Aufgaben aus den inhaltlichen Schwerpunkten Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik statt.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.



2 Aufgabenstellung

Aufgabe 1

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

TrueType™ Schriften für eine Textverarbeitung im Computer lassen sich durch abschnittsweise definierte Polynome beschreiben. Sie haben bestimmte festgelegte Merkmale, müssen aber vor allem veränderbar sein. Beispielsweise wird ein Zeichen in der Schriftart Wingdings wie folgt dargestellt:

normal

kursiv

fett

Ein anderes Zeichen soll durch die folgenden Punkte verlaufen:

$P_1(0/0), P_2(1/0), P_3(2/2), P_4(3/0)$

- 1.1 Ermitteln Sie in einem ersten Modell die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f , deren Graph durch die vorgegebenen Punkte verläuft.

(Kontrollergesult: $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$)

(9 Punkte)

- 1.2 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in das nachstehend abgebildete Koordinatensystem (Anlage zu Aufgabe 1.2). Bestimmen Sie hierzu die Extrem- und Wendepunkte der Funktion f .

(13 Punkte)

- 1.3 In einem zweiten Modell verwenden Sie einen kubischen Spline anstelle einer ganzrationalen Funktion. Stellen Sie die Bedingungen für Splines durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf. Bezeichnen Sie hierbei den i -ten Abschnitt des Splines mit $sp_i(x)$. Beispielsweise ist eine Bedingung $sp_1(0)=0$. (Hinweis: Mit den Bedingungen sind keine weiteren Rechnungen durchzuführen!)

(6 Punkte)

- 1.4 Leiten Sie den maximalen vertikalen Abstand zwischen den y -Koordinaten des Graphen von f und des Splines im Intervall $[0;1]$ her.

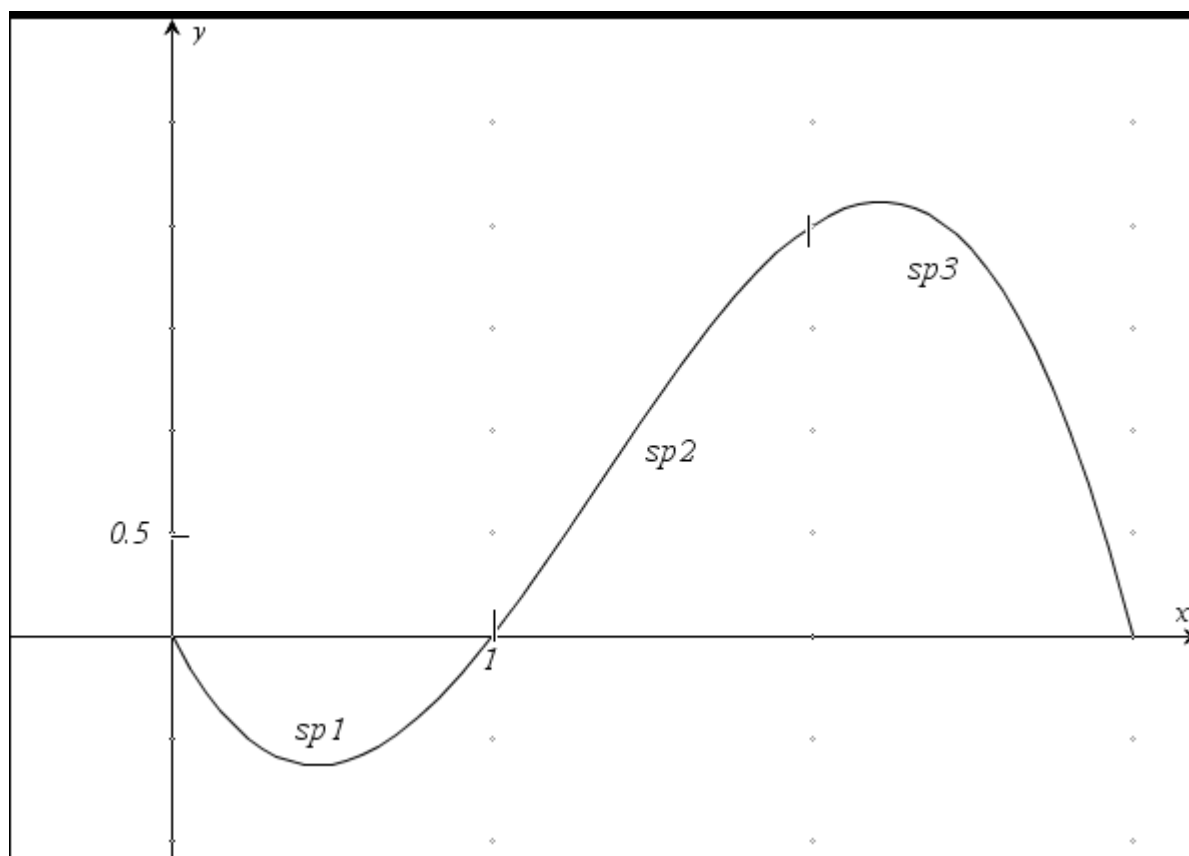
Für sp_1 gilt dabei $sp_1(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 4x)$, $0 \leq x \leq 1$.

(12 Punkte)

- 1.5 Um ein Zeichen fett darzustellen, könnte man z.B. den Graphen von f im Intervall $[0; 3]$ um 0,1 Einheiten nach unten verschieben, so dass der Graph einer Funktion g entsteht. Das Zeichen erzeugt man durch Ausfüllen des Zwischenraums. Bestimmen Sie die Fläche des Zwischenraums.

(5 Punkte)

Anlage zu Aufgabe 1.2



Aufgabe 2

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

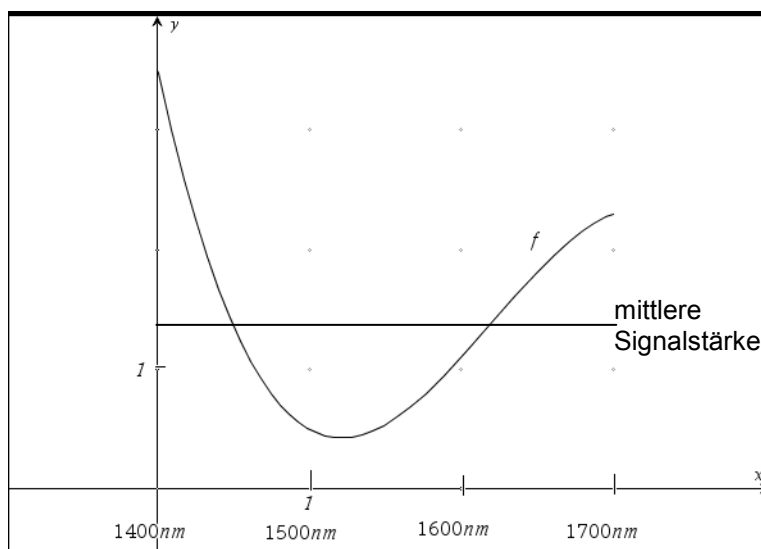
Beschreibung der Ausgangssituation:

In der modernen Datenübertragung werden neben Kupferleitungen auch Lichtwellenleiter eingesetzt. Diese bestehen aus dünnen Fasern aus lichtdurchlässigem Material (Kunststoff / Glas). Ein wesentlicher Vorteil des Lichtwellenleiters (LWL) besteht darin, dass lange Strecken ohne Verstärker überbrückt werden können.

Die Signalstärke der Verbindung hängt u. a. von der Wellenlänge des verwendeten Lichts ab (inkl. Infrarot und UV-Wellen). In einigen Bereichen des Spektrums ist die Dämpfung der Signalstärke aufgrund der verwendeten Materialien relativ gering. Wir betrachten beispielhaft den Wellenlängenbereich von 1400nm bis 1700nm. Die Skalierung auf der Wellenlängenchse wird so gewählt: $x=0$ entsprechen 1400nm und $x=3$ entsprechen 1700nm.

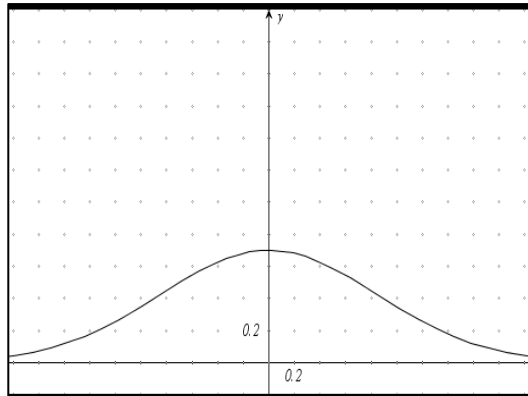
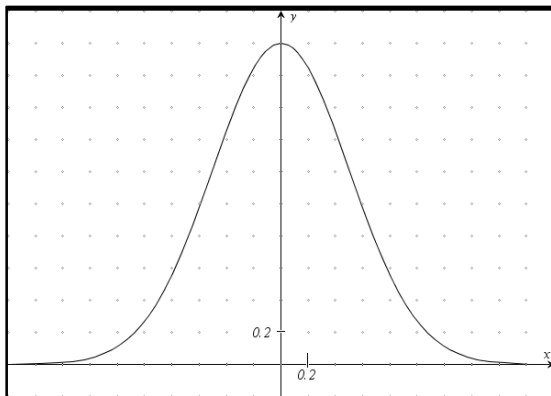
Innerhalb dieses Bereiches lässt sich der Einfluss des Materials auf die Signalstärke näherungsweise durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{33}{10}x^2 - \frac{29}{5}x + \frac{7}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \text{beschreiben.}$$



- 2.1** Berechnen Sie, bei welcher Wellenlänge die Signalstärke am geringsten ist. Leiten Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den Wellenlängenbereich her, in dem die Signalstärke kleiner 1 ist. **(12 Punkte)**
- 2.2** Leiten Sie mit Hilfe der Integralrechnung die mittlere Signalstärke für den Wellenlängenbereich von 1400nm bis 1700nm her. **(8 Punkte)**

Durch ständige Reflektion an der Grenzfläche des LWL kommt es – wie bei einem Prisma – zu einer Auffächerung der verschiedenen Wellenlängen. Wenn eine Information als kurzer Puls ausgesandt wird, so „zerfließt“ dieser Informationspuls immer weiter (s. Skizzen).



Ein Lichtpuls soll durch die folgende Funktion angenähert werden:

$$g_a(x) = a \cdot e^{-ax^2}, \quad a > 0$$

- 2.3** Begründen Sie mit Hilfe des Definitions- und Wertebereiches, des Verhaltens im Unendlichen, der Achsenschnittpunkte, der Symmetrie sowie der Bestimmung der Extrempunkte der Funktionenschar g_a , dass es sich bei den obigen Schaubildern um Graphen von g_a handelt.
Geben Sie die bei den obigen Graphen verwendeten Werte des Parameters a an. **(11 Punkte)**

- 2.4** Ein Puls wird vom Empfänger erkannt, wenn die Änderungsrate des Pulses ein Extremum annimmt. Dieses Niveau ist durch die Wendepunkte bestimmt. Leiten Sie mit Hilfe der Differentialrechnung für den Fall $a=2$ das Intervall her, in dem der Puls oberhalb der Wendepunkte liegt, also vom Empfänger erkannt wird. **(8 Punkte)**

- 2.5** Durch oben beschriebenen Effekt „zerfließt“ der Puls bei langen Übertragungswegen, was u. a. durch die Ortskurve der Wendepunkte beschrieben werden kann. Der Wendepunkt der Funktionenschar g_a hat für $x > 0$ die Koordinaten $W_1\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}; a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Leiten Sie die zugehörige Ortskurve her. **(6 Punkte)**



Auswahlaufgabe 3

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Auch in Lichtwellenleitern (LWL) können Informationen fehlerhaft übertragen werden. Die Fehlerrate hängt u. a. von der Länge des LWLs ab. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Fehler unabhängig voneinander auftreten.

3.1 So liegt z.B. die Fehlerquote für eine 300m lange Leitung bei $p = 0,02$.

3.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 50 übermittelten Informationseinheiten

- kein Fehler auftritt
- 2 bis 3 Fehler auftauchen.

(6 Punkte)

3.1.2 Liegen maximal 5 Fehler vor, so sind diese durch Fehlerkorrektur behebbar. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Informationen trotz Fehlerkorrektur nicht nutzbar sind.

(4 Punkte)

3.2

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei $p = 0,05$ genau zwei Fehler direkt nacheinander übertragen werden.

(2 Punkte)

3.2.2 Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit dafür her, dass bei 50 Zeichen das Ereignis „drei Fehler direkt hintereinander“ genau einmal auftritt.

(6 Punkte)

3.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein langer LWL eine Information fehlerhaft überträgt, sei $p = 0,08$. Bei der Verarbeitung der empfangenen Daten werden ebenfalls Fehler gemacht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür sei $p = 0,06$.

3.3.1 Stellen Sie diesen Zusammenhang in einem Baumdiagramm grafisch dar.

(6 Punkte)

3.3.2 Aufgrund von Tests rechnet man für Informationsfehler, die durch Übertragung und/oder durch Verarbeitung entstehen, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p=0,1352$. Begründen Sie den Wert mit Hilfe einer Rechnung.

(7 Punkte)



3.4 Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung betrage $p = 0,05$. Ein Analyseprogramm zur Fehlererkennung arbeitet wie folgt:

Liegt ein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit als Fehler.

Liegt kein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen Fall zu 99%.

Das Analyseprogramm gibt einen Fehler aus. Es soll die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Fehlalarm handelt und tatsächlich kein Fehler vorliegt, bestimmt werden. Stellen Sie für diesen Zusammenhang eine 4-Felder-Tafel auf und leiten Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit her. **(14 Punkte)**

Für die gesamte Darstellungsleistung werden **15 Punkte** vergeben.

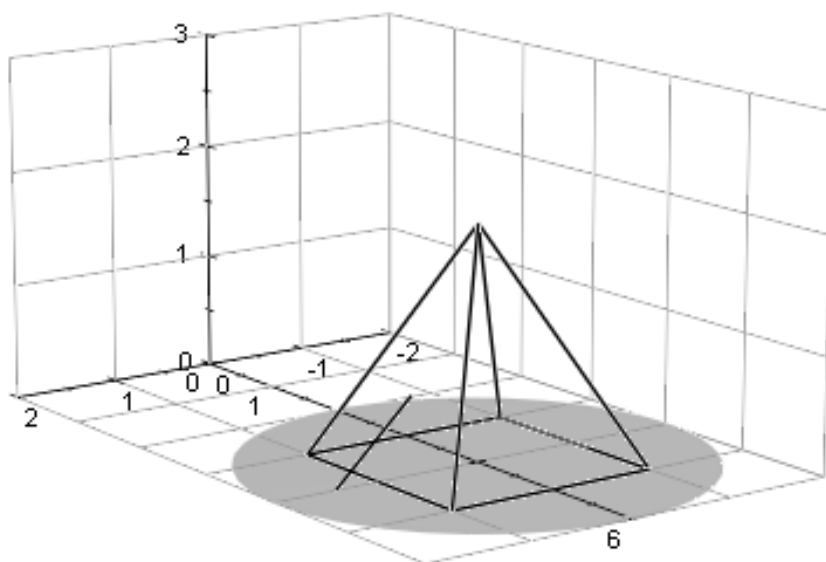
Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**

Auswahlaufgabe 4

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Sie sind an der Programmierung des Spiels „Ratz Fatz In Einer Minute“ beteiligt. Zur Zeitkontrolle dreht sich eine Pyramide mit „Sekundenzeiger“ auf einer Kreisscheibe, die in der x_1x_2 -Ebene liegt.



- 4.1** Die Spitze der Pyramide wird durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden g_1, \dots, g_4 beschrieben. Die Eckpunkte der Grundfläche ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2 -Ebene.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$
$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- 4.1.1** Prüfen Sie, ob sich alle vier Geraden im Punkt $A(0; 4; 2)$ schneiden.

(4 Punkte)

- 4.1.2** Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2 -Ebene.

(8 Punkte)



Die Pyramide hat u. a. die Eckpunkte $A(0;4;2)$, $B(1;5;0)$ und $E(1;3;0)$. Durch eine punktförmige Öffnung in $F(\frac{2}{3};4;\frac{2}{3})$ im Dreieck ABE fällt ein Lichtstrahl aus der Pyramide auf die Kreisscheibe, die er im Punkt $G(\sqrt{2};4;0)$ trifft.

4.2 Zeigen Sie, dass F der Schwerpunkt des Dreiecks ABE ist und dass die Seitenhalbierenden sich dort im Verhältnis 2:1 schneiden. **(10 Punkte)**

4.3 Die Pyramide soll nun innerhalb einer Minute um eine Parallele zur x_3 -Achse durch den Punkt A gedreht werden. Dabei beschreibt ein von dem Lichtstrahl erzeugter Lichtpunkt in der x_1x_2 -Ebene einen Kreis.

(Hinweis: Die Rotationsmatrix $\text{Rot}_{\alpha, \text{Nullpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ bewirkt im \mathbb{R}^2 eine Rotation um den Nullpunkt, wobei der Winkel mathematisch negativ orientiert ist).

4.3.1 Stellen Sie die Gleichung einer affinen Abbildung auf, mit der die Position L' des Lichtpunktes $L(\sqrt{2};4)$ nach 10 Sekunden ermittelt werden kann. Leiten Sie die Lage des Punktes L' her. **(9 Punkte)**

4.3.2 Der Lichtpunkt hat sich bei der Rotation der Pyramide aus der Nullposition gedreht, so dass der Punkt $L(\sqrt{2};4)$ in den Punkt $L'(\frac{-\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + 4)$ überführt wurde. Leiten Sie her, wie viele Sekunden vergangen sind. **(8 Punkte)**

4.4 Die Rotationsmatrix um die x_3 -Achse im \mathbb{R}^3 ist wie folgt definiert:

$$\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie unter zu Hilfenahme der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, \text{Nullpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, warum die Abbildung mit der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}}$ eine Rotation im \mathbb{R}^3 bewirkt.

(6 Punkte)

Für die gesamte Darstellungsleistung werden **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**



Anhang

Tabellierte kumulierte Binomialverteilung

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
20	0	6676	5438	4420	3585	1216	0692	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	19	20
	1	9401	8802	8103	7358	3917	2669	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0000	18	
	2	9929	9790	9561	9245	6769	5353	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0002	17	
	3	9994	9973	9926	9841	8670	7653	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0013	16	
	4		9997	9990	9974	9568	9050	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0059	15	
	5			9999	9997	9887	9688	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0207	14	
	6					9976	9916	9629	9133	7858	6080	4793	2500	0577	13	
	7					9996	9981	9887	9679	8982	7723	6615	4159	1316	12	
	8					9999	9997	9972	9900	9591	8867	8095	5956	2517	11	
	9						9999	9994	9974	9861	9520	9081	7553	4119	10	
	10							9999	9994	9961	9829	9624	8725	5881	9	
	11								9999	9991	9949	9870	9435	7483	8	
	12									9998	9987	9963	9790	8684	7	
	13										9997	9991	9935	9423	6	
	14											9998	9984	9793	5	
	15												9997	9941	4	
	16													9987	3	
	17													9998	2	
	18														1	
	19														0	

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
30	0	5455	4010	2939	2146	0424	0182	0042	0012	0002	0000	0000	0000	0000	29	30
	1	8795	7731	6612	5535	1837	0962	0295	0105	0020	0003	0001	0000	0000	28	
	2	9783	9399	8831	8122	4114	2579	1028	0442	0106	0021	0007	0000	0000	27	
	3	9971	9881	9694	9392	6474	4734	2396	1227	0374	0093	0033	0003	0000	26	
	4	9997	9982	9937	9844	8245	6812	4243	2552	0979	0302	0122	0015	0000	25	
	5		9998	9989	9967	9268	8356	6164	4275	2026	0766	0355	0057	0002	24	
	6			9999	9994	9742	9275	7765	6070	3481	1595	0838	0172	0007	23	
	7				9999	9922	9725	8863	7608	5143	2814	1668	0435	0026	22	
	8					9980	9910	9494	8713	6736	4315	2860	0940	0081	21	
	9					9995	9974	9803	9389	8034	5888	4317	1763	0214	20	
	10					9999	9994	9933	9744	8943	7304	5848	2915	0494	19	
	11						9999	9980	9905	9493	8407	7239	4311	1002	18	
	12							9995	9969	9784	9155	8340	5785	1808	17	
	13							9999	9991	9918	9599	9102	7145	2923	16	
	14								9998	9973	9831	9565	8246	4278	15	
	15								9999	9992	9936	9812	9029	5722	14	
	16									9998	9979	9928	9519	7077	13	
	17										9994	9975	9788	8192	12	
	18											9998	9993	9917	11	
	19												9998	9971	10	
	20													9991	9	
	21													9998	8	
	22													9974	7	
	23													9993	6	
	24													9998	5	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
50	0	3642	2181	1299	0769	0052	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	49	50
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0103	0012	0002	0000	0000	0000	0000	0000	48	
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0418	0066	0013	0001	0000	0000	0000	0000	47	
	3	9822	9372	8609	7604	2503	1138	0238	0057	0005	0000	0000	0000	0000	46	
	4	9968	9832	9510	8964	4312	2346	0643	0185	0021	0002	0000	0000	0000	45	
	5	9995	9963	9856	9622	6161	3935	1388	0480	0070	0007	0001	0000	0000	44	
	6	9999	9993	9964	9882	7702	5637	2506	1034	0194	0025	0005	0000	0000	43	
	7		9999	9992	9968	8779	7165	3911	1904	0453	0073	0017	0001	0000	42	
	8			9999	9992	9421	8339	5421	3073	0916	0183	0050	0002	0000	41	
	9				9998	9755	9121	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0000	40	
	10					9906	9579	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0000	39	
	11					9968	9817	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0000	38	
	12					9990	9928	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0002	37	
	13					9997	9974	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0005	36	
	14					9999	9991	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0013	35	
	15						9997	9943	9692	8369	5692	3690	0955	0033	34	
	16						9999	9978	9856	9017	6839	4868	1561	0077	33	
	17							9992	9937	9449	7822	6046	2369	0164	32	
	18							9997	9975	9713	8594	7126	3356	0325	31	
	19							9999	9991	9861	9152	8036	4465	0595	30	
	20								9997	9937	9522	8741	5610	1013	29	
	21								9999	9974	9749	9244	6701	1611	28	
	22									9990	9877	9576	7660	2399	27	
	23									9996	9944	9778	8438	3359	26	
	24									9999	9976	9892	9022	4439	25	
	25										9991	9951	9427	5561	24	
	26										9997	9979	9686	6641	23	
	27										9999	9992	9840	7601	22	
	28											9997	9924	8389	21	
	29											9999	9966	8987	20	
	30												9986	9405	19	
	31												9995	9675	18	
	32												9998	9836	17	
	33												9999	9923	16	
	34													9967	15	
	35													9987	14	
	36													9995	13	
	37													9998	12	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



3 Materialgrundlage

keine

4 Bezüge zu den „Vorgaben für die Abiturprüfung am Berufskolleg im Jahr 2009“

- **Aufgabe 1: Ganzrationale Funktionen**
 - **Funktionseigenschaften**
 - Kurvenscharen
 - Ableitungsregeln
 - Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte
 - **Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Bedingungen**
 - Lineare Gleichungssysteme mit vier Unbekannten
 - Splines
 - **Integration**
 - Bestimmung von Stammfunktionen
 - Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals
- **Aufgabe 2: Ganzrationale Funktionen / Exponentialfunktionen**
 - **Funktionseigenschaften**
 - Kurvenscharen
 - Ableitungsregeln
 - Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte
- **Auswahlaufgabe 3: Stochastik**
 - **Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung**
 - Ergebnis, Ereignis, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln, Zählstrategien
 - Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vier-Felder-Tafeln
 - Satz von Bayes
 - **Binominalverteilung**
 - Kenngrößen der Binomialverteilung
- **Auswahlaufgabe 4: Lineare Algebra**
 - **Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum**
 - Darstellungsformen von Geraden und Ebenen
 - Schnittpunkte und Schnittgeraden
 - **Grundlagen der Matrizenrechnung**
 - Elementare Matrizenoperationen
 - Lineare Abbildungen und ihre Verkettungen
 - Abbildungsmatrizen und affine Abbildungen
 - Umkehrbare Abbildungen



5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2009 sind zugelassen:
 - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
 - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung, s. Anhang dieses Dokumentes,
 - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2009 sind **nicht** zugelassen:
 - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
 - Computeralgebrasysteme
 - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Erstellen von Wertetabellen
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

Die beiden Aufgaben zur Analysis (Aufgabe 1 und Aufgabe 2) sind verbindlich zu bearbeiten. Von den Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie (Aufgabe 3) und zur Stochastik (Aufgabe 4) wählt die Fachlehrerin / der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Prüfungsaufgaben zur Bearbeitung. Sie erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

Die schriftliche Prüfung dauert gemäß § 17 Anlage D, APO-BK, viereinviertel Zeitstunden.

7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

7.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Die Lösungserwartungen dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen. Zusätzliche Leistungen sind angemessen zu berücksichtigen. Dies betrifft etwa Lösungen, die bei den Lösungserwartungen nicht aufgeführt sind, aber dennoch richtige Lösungen sind.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die kleinste Einheit zur Bewertung der erbrachten Schülerleistung im Rahmen der kriteriellen Leistungserfassung ist 1 Punkt. Dementsprechend können nur ganze Punkte vergeben werden.

Die Teilleistungen werden den in Teil I der Bildungspläne definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet. Danach werden den Lösungen der Teilaufgaben Punkte zugewiesen, die den Schwierigkeitsgrad, die Komplexität und den Zeitaufwand für die Bearbeitung der einzelnen Teilaufgabe repräsentieren. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität. Hinzu kommt die Art der Bearbeitung in den verschiedenen Anforderungsbereichen, wobei Aspekte der Qualität, Quantität und der Darstellungsweise berücksichtigt werden.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein.

Die inhaltlichen Leistungen werden aufgabenbezogen, die Darstellungsleistungen aufgabenübergreifend bewertet.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 8 Abs. 3 APO-BK) wird im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistung getroffen. Schwerwiegende und gehäufte Verstöße führen zu einem Abzug von 1 bis 2 Punkten bei der Leistungsbewertung den entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein.

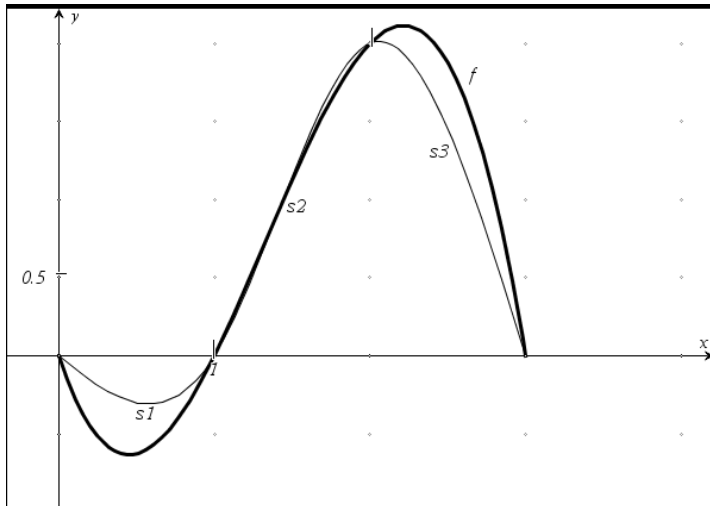


7.2 Erfassung der Teilleistungen

a) inhaltliche Leistung

Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
1	1.1		Ermitteln Sie in einem ersten Modell die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f, deren Graph durch die vorgegebenen Punkte verläuft.			
		1.1.1	$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f(0) = 0$ $f(1) = 0$ $f(2) = 2$ $f(3) = 0$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Umformungen ergeben: $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$	5	4	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
1.2			Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in das nachstehend abgebildete Koordinatensystem (Anlage zu Aufgabe 1.2). Bestimmen Sie hierzu die Extrem- und Wendepunkte der Funktion f.			
	1.2.1	$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ $f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$ $f''(x) = -6x + 8$ $f'''(x) = -6$ Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,215 \vee x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,451)$ $f'(2.215) \approx 0 \wedge f''(2,215) \approx -5,296 < 0$ \Rightarrow Max mit H(2.215 / 2,11) $f'(0,451) \approx 0 \wedge f''(0,451) \approx 5,296 > 0$ \Rightarrow Min mit T(0,451 / - 0,631) Wendepunkte: $(f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_w = \frac{4}{3}) \wedge f'''(x_w) = -6$ \Rightarrow Wendepunkt in W($\frac{4}{3}$ / $\frac{20}{27}$)	5	4		
	1.2.2				4	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
	1.3		In einem zweiten Modell verwenden Sie einen kubischen Spline anstelle einer ganzrationalen Funktion. Stellen Sie die Bedingungen für Splines durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf. Bezeichnen Sie hierbei den i-ten Abschnitt des Splines mit $sp_i(x)$. Beispielsweise ist eine Bedingung $sp_1(0)=0$.			
		1.3.1	$sp_1(1) = 0$ $sp_1'(1) = sp_2'(1)$ $sp_1''(1) = sp_2''(1)$ $sp_2(1) = 0$ $sp_2(2) = 2$ $sp_2'(2) = sp_3'(2)$ $sp_2''(2) = sp_3''(2)$ $sp_3(2) = 2$ $sp_3(3) = 0$ Randbedingungen z.B. $sp_1''(0) = 0$ und $sp_3''(3) = 0$			6



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
	1.4		Leiten Sie den maximalen vertikalen Abstand zwischen den y-Koordinaten des Graphen von f und des Splines im Intervall [0;1] her. Für sp_1 gilt dabei $sp_1(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 4x)$, $0 \leq x \leq 1$.			
	1.4.1		Verwende $sp_1(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 4x)$ Für die Abstandsfunktion d(x) gelte: $d(x) = sp_1(x) - f(x) = \frac{1}{5}(9x^3 - 20x^2 + 11x)$ $d'(x) = \frac{1}{5}(27x^2 - 40x + 11)$ $d''(x) = \frac{1}{5}(54x - 40)$ Nullstelle der ersten Ableitung für $x \in [0;1]$ ist $x_E = \frac{-(\sqrt{103} - 20)}{27} \approx 0,364856$ $d'(x_E) = 0 \wedge d''(x_E) < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei P(0,36/0,357). D.h., dass der maximale Abstand zwischen Spline und Funktion 0,357 LE beträgt.			12
	1.5		Um ein Zeichen fett darzustellen, könnte man z.B. den Graphen von f Intervall [0; 3] um 0,1 Einheiten nach unten verschieben, so dass der Graph einer Funktion g entsteht. Das Zeichen erzeugt man durch Ausfüllen des Zwischenraums. Bestimmen Sie die Fläche des Zwischenraums.			
	1.5.1		$\int_0^3 (f(x) - (f(x) - 0,1)) dx = \int_0^3 0,1 dx = [0,1x]_0^3 = 0.3 \text{ FE}$		5	
			Summe in den Anforderungsbereichen	14	19	12
			Summe Aufgabe 1	45		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punk- te		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
2	2.1		Berechnen Sie, bei welcher Wellenlänge die Signalstärke am geringsten ist.			
		2.1.1	$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{5}x - \frac{29}{5}$ $f''(x) = -3x + \frac{33}{5}$ <p>Ableitung bilden, notwendiges Kriterium für Extrema: $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{5}x - \frac{29}{5} = 0$ $x_1 = 1,213 \quad x_2 = 3,187$ $f''(1,213) = 2,96 ; f''(3,187) = -2,96$ bei x_1 Tiefpunkt; (bei x_2 Hochpunkt) Wellenlänge: $1400\text{nm} + 121,3\text{nm} = 1521,3\text{nm}$.</p>	5		
			Leiten Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den Wellenlängenbereich her, in dem die Signalstärke kleiner 1 ist.			
		2.1.2	$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{33}{10}x^2 - \frac{29}{5}x + \frac{7}{2} < 1$ <p>Untersuchung der Intervallgrenzen $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ; \text{ Startwert z.B. } x_1 = 0,5$ $x_2 = 0,608 \quad x_3 = 0,643 \quad x_4 = 0,644$ andere Intervallgrenze: $x_1 = 2$ $x_2 = 1,929 \quad x_3 = 1,927$ Wellenlänge: $1400\text{nm} + 64,4\text{nm} = 1464\text{nm}$ bzw. $1400\text{nm} + 192,7\text{nm} = 1592,7\text{nm}$. Folglich sollte x im Bereich von etwa 1464nm bis 1593nm liegen.</p>	3	2	2



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punk-te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
	2.2		Leiten Sie mit Hilfe der Integralrechnung die mittlere Signalstärke für den Wellenlängenbereich von 1400nm bis 1700nm her.			
		2.2.1	$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 f(x) dx = 1,325$		6	2
	2.3		Begründen Sie mit Hilfe des Definitions- und Wertebereiches, des Verhaltens im Unendlichen, der Achsenschnittpunkte, der Symmetrie sowie der Bestimmung der Extrempunkte der Funktionenschar g_a , dass es sich bei den obigen Schaubildern um Graphen von g_a handelt. Geben Sie die bei den obigen Graphen verwendeten Werte des Parameters a an.			
		2.3.1	$g_a(x) = a \cdot e^{-ax^2}, \quad a > 0$ <p>Definitions- und Wertebereich: $ID = \mathbb{R} \quad ; W = \mathbb{R}^+$</p> <p>Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_a(x) = 0$</p> <p>Achsenschnittpunkte: keine Nullstellen, $S_Y(0/a)$</p> <p>Symmetrie: $\forall_{x \in ID} g_a(x) = g_a(-x)$</p> <p>$\Rightarrow g_a$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse</p> <p>Extrempunkte:</p> $g_a'(x) = -2a^2 x \cdot e^{-ax^2}$ $(g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0) \wedge (g_a''(0) < 0) \Rightarrow g_a \text{ rel. HP bei } P(0/a).$ <p>Die dargestellten Graphen entsprechen in allen Untersuchungspunkten den Anforderungen.</p> <p>verwendetes a:</p> $g_a(0) = a \cdot e^0 = 2 \Rightarrow a = 2$ $g_a(0) = a \cdot e^0 = 0.7 \Rightarrow a = 0.7$	5	4	2

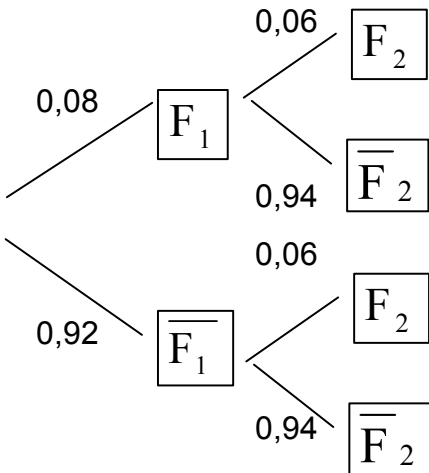


Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punk-te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
	2.4		Ein Puls wird vom Empfänger erkannt, wenn die Änderungsrate des Pulses ein Extremum annimmt. Dieses Niveau ist durch die Wendepunkte bestimmt. Leiten Sie mit Hilfe der Differentialrechnung für den Fall $a=2$ das Intervall her, in dem der Puls oberhalb der Wendepunkte liegt, also vom Empfänger erkannt wird.			
	2.4.1		Wendepunkte: $g_a''(x) = (4a^3x^2 - 2a^2) \cdot e^{-ax^2}$ $g_a'''(x) = -4a^3x \cdot (2ax^2 - 3) \cdot e^{-ax^2}$ $(g_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}) \wedge (g_a'''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}) \neq 0)$ $\Rightarrow WP_{1/2} (\pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} / ae^{-\frac{1}{2}})$ Für $a=2$ wird das Signal im Intervall $] -0,5; 0,5[$ vom Empfänger erkannt.		3	5
	2.5		Durch oben beschriebenen Effekt „zerfließt“ der Puls bei langen Übertragungswegen, was u. a. durch die Ortskurve der Wendepunkte beschrieben werden kann. Der Wendepunkt der Funktionenschar g_a hat für $x > 0$ die Koordinaten $W_1(\frac{1}{\sqrt{2a}} / a \cdot e^{-\frac{1}{2}})$. Leiten Sie die zugehörige Ortskurve her.			
	2.5.1		$W_1(\frac{1}{\sqrt{2a}} / a \cdot e^{-\frac{1}{2}})$ Ortskurve: $x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow a = \frac{1}{2x^2}; o(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,3033 \cdot \frac{1}{x^2}$		4	2
			Summe in den Anforderungsbereichen	13	19	13
			Summe Aufgabe 2	45		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punk- te		
				I	II	III
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung			
3	3.1		Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 50 übermittelten Informationseinheiten - kein Fehler - 2 bis 4 Fehler auftauchen.			
		3.1.1	$p = 0,02, n = 50$ $B(50;0,02;0) = 0,3642$ $F(50;0,02;4) - F(50;0,02;1) = 0,2610$	6		
			Liegen maximal 5 Fehler vor, so sind diese durch Fehlerkorrektur behebbar. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Informationen trotz Fehlerkorrektur nicht nutzbar sind.			
		3.1.2	$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$ $p=0,02 \Rightarrow 1 - 0,9995 = 0,0005$	4		
	3.2		Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei $p = 0,05$ zwei Fehler direkt nacheinander übertragen werden.			
		3.2.1	$(p)^2 = 0,0025$		2	
			Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit dafür her, dass bei 50 Zeichen das Ereignis „drei Fehler direkt hintereinander“ genau einmal auftritt.			
		3.2.2	Wahrscheinlichkeit für „3-er Fehler“: $0,05^3 = 0,000125$ Dies kann bei 48 Positionen möglich sein (1-2-3; 2-3-4; 4-5-6; ...; 48-49-50) $\Rightarrow P(\text{„mind. 3er Sequenz“}) = 48 \cdot 0,000125 = 0,006$		2	4
	3.3		Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein langer LWL eine Information fehlerhaft überträgt, sei $p = 0,08$. Bei der Verarbeitung der empfangenen Daten werden ebenfalls Fehler gemacht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür sei $p = 0,06$.			
			Stellen Sie diesen Zusammenhang in einem Baumdiagramm grafisch dar.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punkte		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
		3.3.1	<p>F_1: fehlerhafte Datenübertragung, F_2: fehlerhafte Datenverarbeitung</p> 	3	3	
			Aufgrund von Tests rechnet man für Informationsfehler, die durch Übertragung und/oder durch Verarbeitung entstehen, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p=0,1352$. Begründen Sie den Wert mit Hilfe einer Rechnung.			
		3.3.2	<p>$P(F_1 \cap F_2) = 0,0048$ LWL und Empfang fehlerhaft $P(\bar{F}_1 \cap F_2) = 0,0552$ LWL fehlerfrei und Empfang fehlerhaft $P(F_1 \cap \bar{F}_2) = 0,0752$ LWL fehlerhaft und Empfang fehlerfrei $P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) + P(F_1 \cap \bar{F}_2) + P(F_1 \cap F_2) = 0,1352$</p>		4	3
	3.4		Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung betrage $p = 0,05$. Ein Analyseprogramm zur Fehlererkennung arbeitet wie folgt: Liegt ein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit als Fehler. Liegt kein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen Fall zu 99%. Das Analyseprogramm gibt einen Fehler aus.			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punk- te																		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III																
			Es soll die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Fehlalarm handelt und tatsächlich kein Fehler vorliegt, bestimmt werden. Stellen Sie für diesen Zusammenhang eine 4-Felder-Tafel auf und leiten Sie die gesuchte Wahr-scheinlichkeit her.																			
		3.4.1	<table><tr><td></td><td>Alarm ja</td><td>Alarm nein</td><td>Summe</td></tr><tr><td>Fehler ja</td><td>4,8%</td><td>0,2%</td><td>5%</td></tr><tr><td>Fehler nein</td><td>0,95%</td><td>94,05%</td><td>95%</td></tr><tr><td>Summe</td><td>5,75%</td><td>94,25%</td><td>100%</td></tr></table> <p>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mit dem Satz von Bayes bestimmen:</p> $P_{\bar{F}}(A) = \frac{P(\bar{F} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,95\%}{5,75\%} = 16,52\%$ <p>Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlalarm beträgt 16,52%!</p>		Alarm ja	Alarm nein	Summe	Fehler ja	4,8%	0,2%	5%	Fehler nein	0,95%	94,05%	95%	Summe	5,75%	94,25%	100%			
	Alarm ja	Alarm nein	Summe																			
Fehler ja	4,8%	0,2%	5%																			
Fehler nein	0,95%	94,05%	95%																			
Summe	5,75%	94,25%	100%																			
			Summe in den Anforderungsbereichen	13	19	13																
			Summe Auswahlaufgabe 3	45																		

			Summe Aufgabe 1	45
			Summe Aufgabe 2	45
			Summe Auswahlaufgabe 3	45
			Summe Aufgaben 1, 2 und 3	135



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punk- te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
4	4.1		<p>Sie sind an der Programmierung des Spiels „Ratz Fatz In Einer Minute“ beteiligt. Zur Zeitkontrolle dreht sich eine Pyramide mit Sekundenzeiger auf einer Kreisscheibe, die in der x_1x_2-Ebene liegt.</p> <p>Die Spitze der Pyramide wird durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden g_1, \dots, g_4 beschrieben. Die Eckpunkte der Grundfläche ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2-Ebene.</p>			
			Prüfen Sie, ob sich alle vier Geraden im Punkt $A(0; 4; 2)$ schneiden.			
		4.1.1	<p>Für g_1 gilt : $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_1 = -2$</p> <p>Für g_2 gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_2 = 1$</p> <p>Für g_3 gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_3 = 2$</p> <p>Für g_4 gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_4 = -2$</p> <p>Folglich schneiden sich alle vier Geraden in Punkt A.</p>			
				4		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punk- te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
			Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2-Ebene.			
		4.1.2	<p>Für g_1 geschnitten mit der x_1x_2-Ebene gilt:</p> $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$\Rightarrow B(1; 5; 0).$</p> <p>Für g_2 geschnitten mit der x_1x_2-Ebene gilt:</p> $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$\Rightarrow C(-1; 5; 0).$</p> <p>Für g_3 geschnitten mit der x_1x_2-Ebene gilt:</p> $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$\Rightarrow D(-1; 3; 0).$</p> <p>Für g_4 geschnitten mit der x_1x_2-Ebene gilt:</p> $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$\Rightarrow E(1; 3; 0).$</p>	4	4	
	4.2		Zeigen Sie, dass F der Schwerpunkt des Dreiecks ABE ist und dass die Seitenhalbierenden sich dort im Verhältnis 2:1 schneiden.			
		4.2.1	Die Seitenhalbierende s_e schneidet die Seite e in $H_e(\frac{3}{2}; 4\frac{1}{2}; 1)$,			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punk-te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
			<p>s_b schneidet die Seite b in $H_e(\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}; 1)$,</p> <p>$s_a$ schneidet die Seite a in $H_a(\frac{3}{2}; 4\frac{1}{2}; 1)$.</p> $\vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{h}_b - \vec{b}) = \vec{e} + \frac{2}{3}(\vec{h}_e - \vec{e}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{h}_a - \vec{a})$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \vec{f}$		4	6
	4.3		Die Pyramide soll nun innerhalb einer Minute um eine Paral-lele zur x_3-Achse durch den Punkt A gedreht werden. Dabei beschreibt ein von dem Lichtstrahl erzeugter Lichtpunkt in der x_1x_2-Ebene einen Kreis.			
			Stellen Sie die Gleichung einer affinen Abbildung auf, mit der die Position L' des Lichtpunktes $L(\sqrt{2}; 4)$ nach 10 Sekunden ermittelt werden kann. Leiten Sie die Lage des Punktes L' her.			
		4.3.1	$\text{Dreh}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\text{Dreh}_1\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$	4	5	



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs-kriterien	Anforderung	Anforde-rungs-bereiche und Punk-te		
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III
			Der Lichtpunkt hat sich bei der Rotation der Pyramide aus der Nullposition gedreht, so dass der Punkt $L(\sqrt{2};4)$ in den Punkt $L'(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + 4)$ überführt wurde. Leiten Sie her, wie viele Sekunden vergangen sind.			
		4.3.2	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} + 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos(-\alpha) \\ \sqrt{2} \cdot \sin(-\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} + 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos(-\alpha) \\ \sqrt{2} \cdot \sin(-\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow -\alpha = 150^\circ$ <p>Da sich der Lichtstrahl in mathematisch negativer Orientierung dreht $\Rightarrow \alpha = -210^\circ$ und 210° entsprechen 35 Sekunden.</p>		6	2
	4.4		Begründen Sie unter zu Hilfenahme der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, \text{Nullpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, warum die Abbildung mit der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}}$ eine Rotation im \mathbb{R}^3 bewirkt.			
		4.4.1	<p>Die letzte Zeile der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}}$ sorgt dafür, dass bei einer Multiplikation mit einem Vektor die x_3-Koordinate nicht verändert wird. Die letzte Spalte der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}}$ sorgt dafür, dass bei einer Multiplikation mit einem Vektor die x_3-Koordinate in die Berechnung der x_1-, x_2-Koordinate nicht eingeht.</p> <p>Der Rest der Matrix dreht um den Ursprung in der x_1x_2-Ebene.</p>			6
			Summe in den Anforderungsbereichen	12	19	14
			Summe Auswahlaufgabe 4	45		



			Summe Aufgabe 1	45
			Summe Aufgabe 2	45
			Summe Auswahlaufgabe 4	45
			Summe Aufgaben 1, 2 und 4	135

b) Darstellungsleistung (aufgabenübergreifend)

	Kriterien zur Erfassung der Darstellungsleistung	Lösungs- qualität und Punkte
1	Strukturierte Darstellung und Beschreibung des Lösungsweges	4
	Die Schülerin / der Schüler <ul style="list-style-type: none"> ◇ gliedert die Lösung sachlogisch (ein „roter Faden“ ist erkennbar). ◇ stellt den Lösungsweg nachvollziehbar und stringent dar. ◇ bezieht Bild- oder Textquellen sowie sonstige Materialien sinnvoll und angemessen zur Erläuterung des Lösungsweges ein. 	
2	Qualität der äußeren Form und Einhaltung formaler Regeln	4
	Die Schülerin / der Schüler <ul style="list-style-type: none"> ◇ stellt Inhalte bzw. Ergebnisse übersichtlich und gut lesbar dar. ◇ berücksichtigt formale Darstellungsregeln bei der Lösung in angemessener Weise. 	
3	Verwendung von Fachsprache und Fachsymbolik	4
	Die Schülerin / der Schüler <ul style="list-style-type: none"> ◇ verwendet Fachbegriffe problemgerecht. ◇ setzt fachliche Symbole, Formeln, Maßeinheiten sachgerecht ein. 	
4	Qualität der Zeichnungen, Grafiken und Tabellen	3
	Die Schülerin / der Schüler <ul style="list-style-type: none"> ◇ stellt die Zeichnungen, Grafiken u. ä. übersichtlich, normgerecht und bildlich korrekt dar. ◇ fertigt Zeichnungen, Grafiken u. ä. entsprechend den Anforderungen des Faches an. 	
	Summe Darstellungsleistung	15
	Gesamtsumme aus 7.2a und 7.2b	150

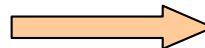


7.3 Bewertung (Notenfindung)

Notenfindung

% Anteil erbrachter Leistung		Noten-Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis unter			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	95%	14	sehr gut	135	142
85%	90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	85%	12	gut plus	120	127
75%	80%	11	gut	113	119
70%	75%	10	gut minus	105	112
65%	70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	65%	8	befriedigend	90	97
55%	60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	50%	5	ausreichend	68	74
39%	45%	4	ausreichend minus	58	67
32%	39%	3	mangelhaft plus	49	57
26%	32%	2	mangelhaft	40	48
20%	26%	1	mangelhaft minus	30	39
0%	20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



150

Notenpunkte	
-------------	--



**8 Absenkung der Leistungsbewertung gemäß
§ 8 (4) APO-BK, Anlage D**

Begründung	

Notenpunkte	
--------------------	--